

FICHAS DE MATEMATICAS

C. Arenas
Departament d'Estadística
Universitat de Barcelona

Fichas de Matemáticas

En un intento de adaptar la asignatura de Matemáticas de la licenciatura de Biología al Espacio Europeo de Enseñanza Superior (EEES), nacen las “Fichas Matemáticas”. Estas fichas pretenden proporcionar al alumno los conceptos básicos que se tratarán en la asignatura, a fin de que tenga una base a partir de la cual pueda profundizar y trabajar dichas ideas conceptuales. Estas fichas son un resumen de los conceptos teóricos que deberá adquirir el alumno sobre esta asignatura obligatoria de Matemáticas a lo largo de su aprendizaje.

Espero que estas fichas sean de utilidad a todos los alumnos en su caminar por el sendero del aprendizaje y el conocimiento.

C. Arenas
Prof. Titular de Universidad
Barcelona, 2006.

FICHA 1: RECORDATORIO

Conjuntos

Un conjunto es una colección de objetos. Los objetos de un conjunto se denominan *elementos* del conjunto.

Notación

El elemento x está en el conjunto A $x \in A$

El elemento x no está en el conjunto A $x \notin A$

El conjunto de todos los x que verifican la propiedad P $\{x : P\}$

Clasificación de los números reales $\mathbb{R}$

Números naturales (o enteros positivos) $\mathbb{N}$ $1, 2, 3, \dots$

Enteros $\mathbb{Z}$ $1, -1, 4, 10, -5, -6, \dots$

Números racionales $\mathbb{Q}$ $\{x: x = p/q \text{ con } p \text{ y } q \text{ enteros, } q \neq 0\}$

Números irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ números reales que no son racionales, así por ejemplo $\sqrt{3}, \sqrt[3]{11}, \pi$.

Orden en los números

Los números reales están ordenados. Los símbolos $\leq, \geq$ se llaman desigualdades y $<, >$ se llaman desigualdades estrictas.

Algunas propiedades

- i) si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
- ii) si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ para todo número real c .
- iii) si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.
- iv) si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.
- v) si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

Valor absoluto

El valor absoluto de un número a es la distancia de a al 0. Se representa por $|a|$ y viene

dado por $|a| = a$, si a es positivo, $a \geq 0$
 $|a| = -a$, si a es negativo, $a < 0$.

Fichas de Matemáticas

Si se tiene $|a - c|$ representa la distancia entre a y c siendo su valor

$$\begin{array}{l} |a - c| = a - c, \text{ si } a - c \geq 0 \\ |a - c| = -a + c, \text{ si } a - c < 0 \end{array} \quad \text{es decir} \quad \begin{array}{l} |a - c| = a - c, \text{ si } a \geq c \\ |a - c| = -a + c, \text{ si } a < c \end{array}.$$

Intervalos

Sea $a < b$.

- i) El intervalo abierto (a, b) es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b : $(a, b) = \{x : a < x < b\}$.
- ii) El intervalo cerrado $[a, b]$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b incluyendo los puntos a y b : $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$.

Otros intervalos son:

- iii) $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$.
- iv) $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$.
- v) $(a, \infty) = \{x : a < x\}$.
- vi) $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$.
- vii) $(-\infty, b] = \{x : x \leq b\}$.
- viii) $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$.
- ix) $(-\infty, \infty) =$ conjunto de todos los reales.

Factorial de un número

Sea n un entero positivo, el factorial de n es el producto de todos los enteros de 1 a n

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

Por convenio $0! = 1$.

Algunas fórmulas básicas

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x^{-a} = 1 / x^a$$

$$x^{a+b} = x^a x^b$$

$$x^{a-b} = x^a / x^b$$

$$x^0 = 1, x \neq 0$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

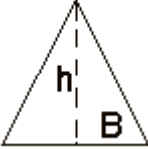
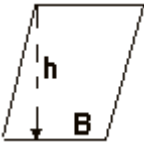
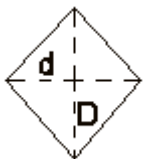
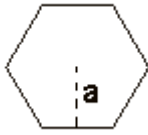
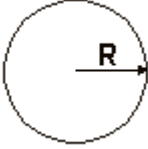
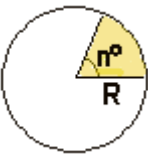
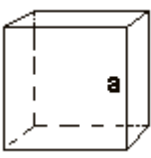
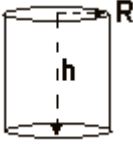
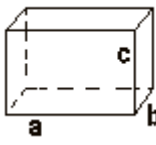
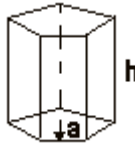
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

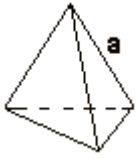
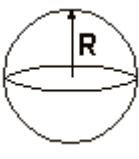
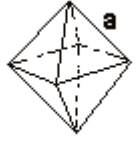
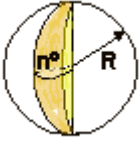
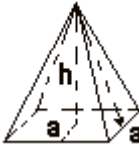
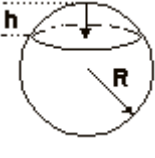
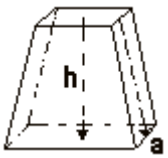
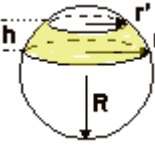
$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^y = y \ln x$$

$$\text{Si } x = e^y \text{ entonces } \ln x = y$$

$$\text{Si } x = a^y \text{ entonces } \ln_a x = y$$

TABLA DE ÁREAS Y VOLÚMENES			
	cuadrado $A = a^2$	triángulo $A = B \cdot h / 2$	
	rectángulo $A = B \cdot h$	romboide $A = B \cdot h$	
	rombo $A = D \cdot d / 2$	trapecio $A = (B + b) \cdot h / 2$	
	polígono regular $A = P \cdot a / 2$ (1)	círculo $A = \pi \cdot R^2$ $P = 2 \cdot \pi \cdot R$	
	corona circular $A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$	sector circular $A = \pi \cdot R^2 \cdot n / 360$	
	cubo $A = 6 \cdot a^2$ $V = a^3$	cilindro $A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (h + R)$ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$	
	ortopedro $A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ $V = a \cdot b \cdot c$	cono $A = \pi \cdot R^2 \cdot (h + g)$ (2) $V = \pi \cdot R^2 \cdot h / 3$	
	prisma recto $A = P \cdot (h + a)$ $V = A_B \cdot h$ (3)	tronco de cono $A = \pi \cdot [g \cdot (r + R) + r^2 + R^2]$ $V = \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) / 3$	

	tetraedro regular $A = a^2 \cdot \sqrt{3}$ $V = a^3 \cdot \sqrt{2} / 12$	esfera $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$ $V = 4 \cdot \pi \cdot R^3 / 3$	
	octaedro regular $A = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$ $V = a^3 \cdot \sqrt{2} / 3$	huso. cuña esférica $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot n / 360$ $V = V_E \cdot n / 360$	
	pirámide recta $A = P \cdot (a + a') / 2$ $V = A_B \cdot h / 3$	casquete esférico $A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$ $V = \pi \cdot h^2 \cdot (3 \cdot R - h) / 3$	
	tronco de pirámide $A = \frac{1}{2}(P + P') \cdot a + A_B + A_{B'}$ $V = (A_B + A_{B'} + \sqrt{A_B \cdot A_{B'}}) \cdot h / 3$	zona esférica $A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$ $V = \pi \cdot h \cdot (h^2 + 3 \cdot r^2 + 3 \cdot r'^2) / 6$	
⁽¹⁾ P es el perímetro (suma de la longitud de los lados) ; a es la apotema ⁽²⁾ g es la generatriz ; $\sqrt{}$ es la raíz cuadrada del número ⁽³⁾ A_B es el área de la base ; h es la altura ; R y r son los radios ;			

FICHA 2: FUNCIONES

Dados dos conjuntos A y B una función f de A en B es una regla que asigna a cada elemento de A uno de B . El conjunto A se llama Dominio de la función ($\text{Dom } f$) y el conjunto de valores de f , es decir, $\{y \in B : y = f(x), x \in A\}$ es la imagen de la función ($\text{Im } f$). Notaremos generalmente una función como $f(x)$ siendo x la variable de la función.

Una función f real de variable real es una función que su dominio es un conjunto de números reales, en general será un intervalo o una unión de intervalos. Su imagen son los números reales.

La función valor absoluto es una función real de variable real, con dominio $(-\infty, \infty)$ e imagen $[0, \infty)$.

Funciones trigonométricas

Ya que conocemos el perímetro de una circunferencia de radio, r , unitario: $L = 2 \cdot \pi \cdot r$ entonces el ángulo de una circunferencia completa, medido en radianes es $2 \times \pi$. Como además sabemos que este mismo ángulo, medido en grados mide 360° , entonces podemos definir una equivalencia:

$$2 \times \pi \text{ radianes} = 360^\circ$$

y por tanto:

$$1 \text{ radián} = 360^\circ / (2 \times \pi) = 57,29^\circ$$

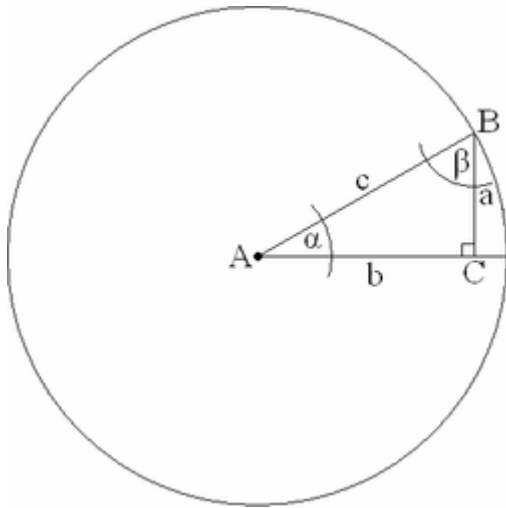
a partir de esta igualdad, determinamos que: $90^\circ = \pi/2$ radianes

$$60^\circ = \pi/3 \text{ radianes}$$

$$45^\circ = \pi/4 \text{ radianes}$$

$$30^\circ = \pi/6 \text{ radianes}$$

$$\text{Long. arco de circunferencia} = [\text{Ángulo en radianes}] \times [\text{Radio de la circunferencia}]$$



El triángulo ABC es un triángulo rectángulo y lo usaremos para definir las funciones seno y coseno.

En un triángulo rectángulo, el seno (abreviado como *sen* o *sin*) es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa, y el coseno (abreviado como *cos*) es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

Si usamos una circunferencia unitaria (con radio igual a uno), entonces la hipotenusa, AB, del triángulo se hace 1, por lo que las relaciones quedan:

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta = a$$

$$\cos \alpha = \text{sen } \beta = b$$

$$\cot \alpha = 1/\text{tg } \alpha$$

$$\sec \alpha = 1/\cos \alpha$$

$$\text{cosec } \alpha = 1/\text{sen } \alpha$$

A continuación algunos valores de las funciones que es conveniente recordar:

ángulo	sen	cos	tg	ctg	sec	csc
0°	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	0	∞	1	∞
30°	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

Fichas de Matemáticas

60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	∞	0	∞	1

Como en el triángulo rectángulo se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, de la figura anterior se tiene que $\sin \alpha = a$, $\cos \alpha = b$, $c = 1$; entonces para todo ángulo α :

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Algunas identidades trigonométricas importantes son las siguientes:

$$\begin{aligned} \sin(90 - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90 - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin(180 - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180 - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin^2(\alpha) &= 1/2 * (1 - \cos(2 * \alpha)); \\ \cos^2(\alpha) &= 1/2 * (1 + \cos(2 * \alpha)); \end{aligned}$$

En un triángulo rectángulo, la tangente (abreviada como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$\tan(a) = \sin(a) / \cos(a)$$

El valor de la tangente para algunos ángulos importantes es:

$$\begin{aligned} \tan(\pi/2) &= \tan(90^\circ) = +\infty \\ \tan(-\pi/2) &= \tan(-90^\circ) = -\infty \\ \tan(0) &= 0 \\ \tan(\pi/4) &= \tan(45^\circ) = 1 \\ \tan(\pi/3) &= \tan(60^\circ) = \sqrt{3} \\ \tan(\pi/6) &= \tan(30^\circ) = \sqrt{3}/3 \end{aligned}$$

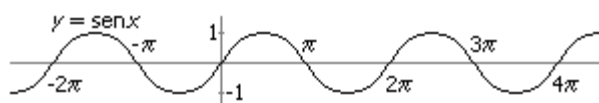
Una identidad de importancia con la tangente es:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

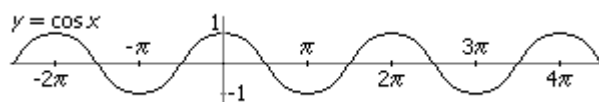
Fichas de Matemáticas

Gráficas

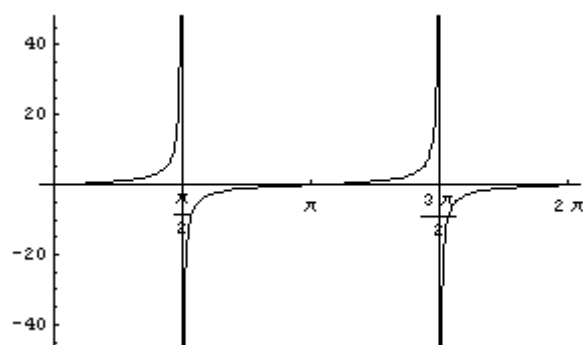
Seno



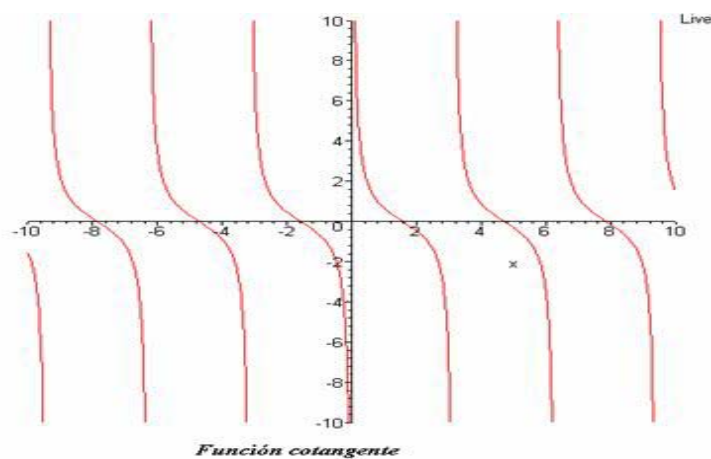
Coseno



Tangente

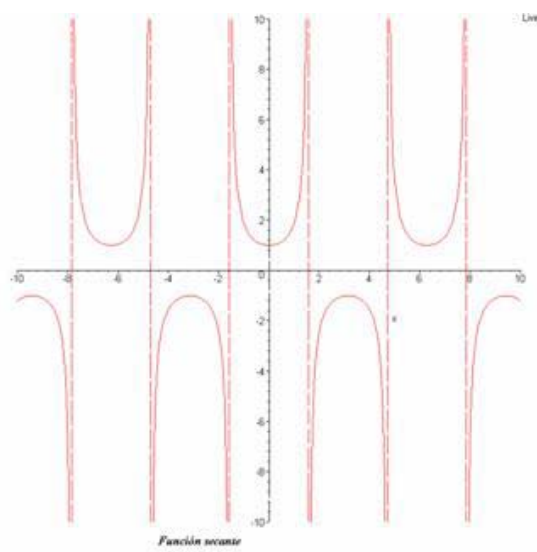


Cotangente

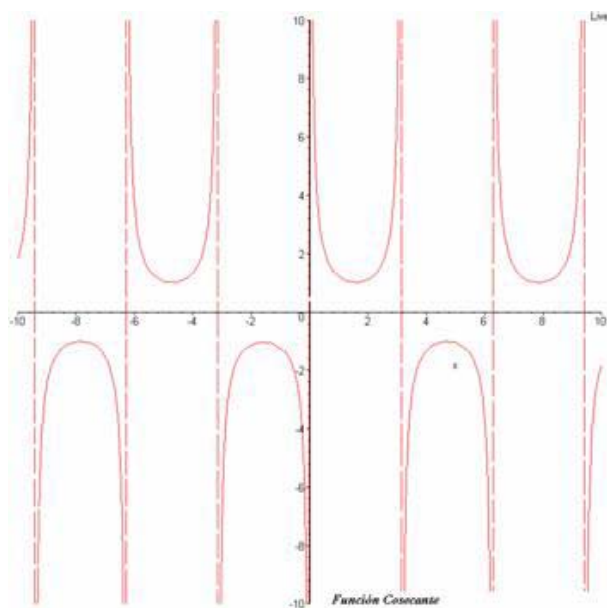


Fichas de Matemáticas

Función secante



Función cosecante



Operaciones entre funciones

Suma	$[f + g](x) = f(x) + g(x)$
Diferencia	$[f - g](x) = f(x) - g(x)$
Producto	$[f \cdot g](x) = f(x) \cdot g(x)$
Cociente	$[f / g](x) = f(x) / g(x)$, siempre que $g(x) \neq 0$
Composición	$[f \circ g](x) = f(g(x))$

Funciones inversas dos funciones f y g son funciones inversas una de la otra si
 $(f \circ g)(x) = x$ para todo $x \in \text{dom}(g)$
 $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in \text{dom}(f)$

Límite de una función: noción informal

El número L es el límite de una función f cuando x se aproxima a un punto c , y lo representaremos por $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ si y sólo si los valores de la función $f(x)$ se aproximan (tienden) a L cuando x se aproxima a c .

Se denominan límites laterales a:

Límite por la izquierda

$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} f(x) = L$ cuando x se aproxima a c por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a L

Límite por la derecha

$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} f(x) = L$ cuando x se aproxima a c por la derecha, $f(x)$ se aproxima a L

Se cumple que:

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} f(x) = L$ y $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} f(x) = L$

es decir, existe el límite de una función en un punto si y sólo si existe límite por la izquierda y existe límite por la derecha y ambos coinciden.

Algunas propiedades de los límites

Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ entonces

Fichas de Matemáticas

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = L - M$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [\alpha f(x)] = \alpha L$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) / g(x)] = L / M, \text{ si } M \neq 0$$

Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ con $L \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) / g(x)]$ no existe

FICHA 3: CONTINUIDAD

Dada una función f definida en un intervalo abierto de la forma $(c - p, c + p)$ con $p > 0$, diremos que f es continua en el punto c si y sólo si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Que una función sea continua en un punto implica que deben cumplirse tres condiciones:

- i) f esté definida en c
- ii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe
- iii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Diremos que una función es discontinua en un punto c si no es continua en ese punto.

Tipos de discontinuidad:

- i) Discontinuidad evitable: la función tiene límite cuando x tiende a c , pero este límite no coincide con $f(c)$, es decir se cumplen i) ii) pero no iii). Se denomina evitable porque basta cambiar la definición de la función en el punto c para conseguir que sea continua.
- ii) Discontinuidad de salto: la función no tiene límite en el punto c . Es decir, existen los límites laterales pero no toman el mismo valor.
- iii) Discontinuidad infinita o asintótica: al menos uno de los dos límites laterales no existe, es decir, la función por la derecha o por la izquierda tiende a ∞ ó bien a $-\infty$.

Relación con las operaciones:

Si f y g son continuas en c entonces:

- i) $f+g$ continua en c
- ii) $f-g$ continua en c
- iii) αf continua en c para todo real α
- iv) fg continua en c
- v) f/g continua en c
- vi) si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, la función compuesta $f \circ g$ es continua en c .

Continuidad por la izquierda y por la derecha

Diremos que una función es continua por la izquierda en c si y sólo si $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$

Fichas de Matemáticas

Diremos que una función es continua por la derecha en c si y sólo si $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$

Por lo tanto, una función es en c si y sólo si $f(c)$, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ existen y son iguales.

FICHA 4: DERIVADAS

Diferenciación

En terminología algo anticuada, **diferenciación** manifiesta el coeficiente en que una cantidad y cambia a consecuencia de un cambio en otra cantidad x con la que tiene una relación funcional. Usando el símbolo Δ para referirse al cambio en una cantidad, se define este coeficiente como un límite del cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

cuando Δx se aproxima a 0. En la notación de Leibniz, se escribe la derivada de y con respecto a x

$$\frac{dy}{dx}$$

Esto sugiere la razón de dos cantidades infinitesimales.

En el lenguaje matemático contemporáneo, se refiere a cantidades dependientes y declara simplemente que la diferenciación es una operación matemática de funciones. La definición precisa (esta también refiere a cantidades *infinitesimales*) parte de un cociente de diferencias:

$$g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Luego a la variable h del cociente anterior se la hace tender a 0, por medio de un límite. Finalmente, queda constituida de la siguiente manera la derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Notación

Existen diversas formas para nombrar a las derivadas. Si f es una función, se escribe la derivada de la función f al valor x en varios modos:

Fichas de Matemáticas

$f'(x)$ {Notación de Lagrange}

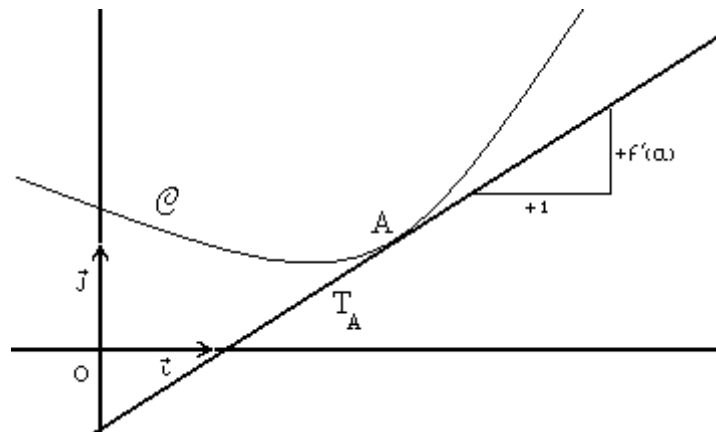
Si $y = f(x)$, se puede escribir la derivada como

$$\frac{dy}{dx}$$

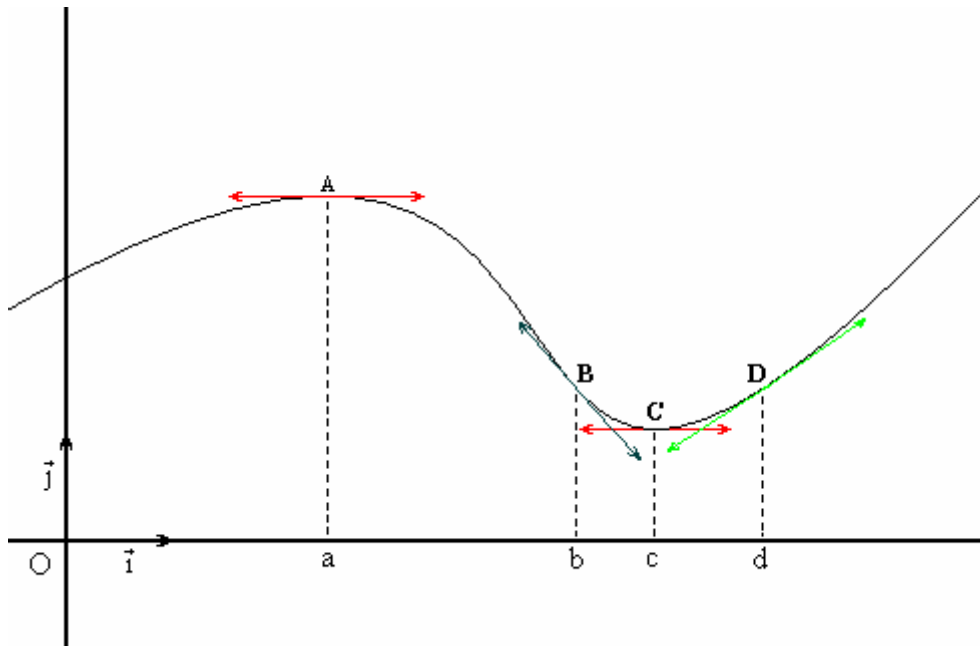
La función $a \rightarrow f'(a)$, es la **función derivada** de f .

Interpretación geométrica

Sea f una función continua, y C su curva. Sea $x = a$ la abscisa de un punto regular, es decir donde C no hace un ángulo. En el punto $A(a, f(a))$ de C se puede trazar la tangente a la curva. Su coeficiente director, o sea su pendiente, es $f'(a)$, el número derivado de f en a .



Conociendo la pendiente de la tangente, es decir $f'(a)$, puede uno saber a que ritmo crece o decrece la función. El signo de $f'(a)$, determina en función f (si crece o no).



En este gráfico se ve que donde f es creciente, las tangentes apuntan hacia arriba (mirando de izquierda a derecha), y por lo tanto f' es positiva, como en el punto D ($x = d$), mientras que donde f es decreciente, las tangentes apuntan hacia abajo y f' es negativa, como en el punto B ($x = b$). En los puntos A y C , que son máximo y mínimo local, la tangente es horizontal, luego $f'(a) = 0 = f'(c)$.

Derivabilidad implica continuidad

Si una función es derivable en $x = a$ entonces es continua en $x = a$.

Es importante notar que el recíproco no es válido; es decir que nada se puede afirmar sobre la derivabilidad de una función continua. Un ejemplo claro de esta situación es la función valor absoluto $f(x) = |x|$ que si bien es continua en todo su dominio no es derivable en $x = 0$.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Función	Derivada
$(f + g)(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$(f \cdot g)(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$kf(x)$	$kf'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
Si g es derivable en a y f es derivable en $g(a)$ entonces la función compuesta $(f \circ g)$ es derivable en a	$f'(g(a))g'(a)$ Regla de la cadena
$(f(x))^n$ n entero o fraccionario	$n(f(x))^{n-1} f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} f'(x)$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} f'(x) \ln a$
$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)} f'(x)$
$\log_a f(x)$	$\frac{1}{f(x)} f'(x) \log_a e$
$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$

DERIVADAS INMEDIATAS (1)

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{1-n}}}$$

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

DERIVADAS INMEDIATAS (2)

$$y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$$

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{1}{u} (\log_a e) u'$$

$$y = u^{\frac{m}{n}} \Rightarrow y' = \frac{m}{n} u^{\frac{m}{n}-1} u'$$

$$y = \operatorname{sen}(u) \Rightarrow y' = \cos(u) u'$$

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'$$

$$y = \cos(u) \Rightarrow y' = -\operatorname{sen}(u) u'$$

$$y = \sqrt[n]{u} = u^{\frac{1}{n}} \Rightarrow y' = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} u' = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{1-n}}} u'$$

$$y = \tan u \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$$

$$y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$$

$$y = \operatorname{arcsen}(u) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$y = a^u \Rightarrow y' = a^u (\ln a) u'$$

$$y = \arccos u \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u} u'$$

$$y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} u'$$

FICHA 5: REGLA DE L'HÔPITAL

Guillaume Francois Antoine Marquis de L'Hopital



En cálculo (matemática), la **regla de L'Hôpital** es utilizada para determinar límites que de otra manera serían complicados de calcular. Esta regla recibe su nombre en honor al matemático francés del siglo XVII Guillaume François Antoine, Marqués de l'Hôpital (1661 - 1704), quien dio a conocer la regla en su obra *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1692), el primer texto que se ha escrito sobre cálculo diferencial.

L'Hopital sirvió como oficial de caballería pero tuvo que retirarse a causa de ser corto de vista. Desde ese tiempo dirigió su atención hacia las matemáticas. L'Hopital aprendió cálculo de su maestro Johann Bernoulli en 1691.

La **regla de L'Hôpital** se puede aplicar si se trata del cociente entre dos funciones continuas $f(x)/g(x)$ cuyo numerador y denominador tienden a **cero** (infinitésimos) o al

infinito. Para calcular el límite se deriva dicho numerador y el denominador y se determina el límite del cociente entre dichas derivadas. Si el límite existe, la regla afirma que coincidirá con el límite de $f(x)/g(x)$, es decir $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, donde c puede ser finito o infinito ($f(c) = g(c) = 0$ ó $f(c) = g(c) = \infty$).

Ejemplos

1. Caso de **indeterminación** "0/0":

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

2. Caso de **indeterminación** " ∞/∞ ":

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = \infty$$

A veces algunos límites que no aparecen dados como cocientes pueden ser calculados con esta regla:

a) **Indeterminación** " $\infty - \infty$ ". En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas. Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \cos(x) + \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\cos x - x \sin(x) + \cos x} = 0$$

b) **Indeterminación** " $0 \cdot \infty$ ". Se debe escribir el límite de forma que quede una indeterminación del tipo "0/0" ó " ∞/∞ ". Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \text{ indeterminación del tipo } \infty/\infty.$$

c) **Indeterminación** " $\infty^0 - 0^0 - 1^\infty$ ". Para determinar estos límites tendremos en cuenta que:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \ln(f(x))}$$

de donde resulta que:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow c} g(x) \ln(f(x))}. \text{ Ejemplo:}$$

Fichas de Matemáticas

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^0 = 1$$

FICHA 6: ESTUDIO DE FUNCIONES

A fin de realizar un estudio completo de una función que permita la obtención de su gráfica, deben seguirse los siguientes pasos:

- 1) Dominio de la función
- 2) Estudio de la continuidad y derivabilidad de la función
- 3) Cálculo de las posibles asíntotas

Si un punto (x,y) se desplaza continuamente por una función $y=f(x)$ de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de **asíntota** de la función.

Las asíntotas se clasifican en:

$$\text{Asíntotas} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Verticales} \\ \textit{Horizontales} \\ \textit{Oblicuas} \end{array} \right\}$$

- a. **Asíntotas verticales** (paralelas al eje OY)

Si existe un número “a” tal, que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

La recta “ $x = a$ ” es la asíntota vertical.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty, \quad x = 2$$

- b. **Asíntotas horizontales** (paralelas al eje OX)

Fichas de Matemáticas

Si existe el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

La recta “ $y = b$ ” es la asíntota horizontal.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+3} = 1, \quad y = 1$$

c. Asíntotas oblicuas (inclinadas)

Si existen los límites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = n$$

La recta “ $y = mx+n$ ” es la asíntota oblicua.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+3}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2+3x} = 2 = m,$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x+3} - 2x \right) = -6 = n, \quad y = 2x - 6$$

4) Monotonía

Sea f una función derivable en el intervalo (a,b) . Luego,

- i) Si $f'(x) > 0$ para todo x en el intervalo abierto (a,b) , f es creciente en (a,b) .
- ii) Si $f'(x) < 0$ para todo x en el intervalo abierto (a,b) , f es decreciente en (a,b) .
- iii) Si $f'(x) = 0$ para todo x en el intervalo abierto (a,b) , f es constante en (a,b) .

5) Máximos, mínimos y puntos de inflexión

Definición: Sea f una función en $\mathbb{C}$:

Fichas de Matemáticas

i) $f(c)$ es un **máximo relativo** de f si existe un intervalo (a,b) que contiene a c tal que $f(x)$ es menor o igual a $f(c)$ para todo x en (a,b) .

ii) $f(c)$ es un **mínimo relativo** de f si existe un intervalo (a,b) que contiene a c tal que $f(x)$ es mayor o igual a $f(c)$ para todo x en (a,b) .

Teorema: Si f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo cuando $x = c$, entonces:

i) $f'(c) = 0$, ó

ii) $f'(c)$ no está definida

Criterio

Se c un punto tal que $f'(c) = 0$

Si $f''(c) > 0$ entonces $(c, f(c))$ es un mínimo relativo

Si $f''(c) < 0$ entonces $(c, f(c))$ es un máximo relativo

Definición: Sea f una función en $\mathbb{R}$:

i) $f(c)$ es un **máximo absoluto** de f si $f(x)$ es menor o igual a $f(c)$ para todo x en $\text{Dom } f$.

ii) $f(c)$ es un **mínimo absoluto** de f si $f(x)$ es mayor o igual a $f(c)$ para todo x en $\text{Dom } f$.

6) Concavidad

La **concavidad** de la gráfica de una función se refiere a dónde se curva la gráfica hacia arriba y dónde se curva hacia abajo. En la Figura se observa que la gráfica se curva hacia abajo en el intervalo $(-2,0)$ y se curva hacia arriba en el intervalo $(0,5)$.

Definición: Si f es una función derivable en el intervalo abierto (a,b) , entonces la gráfica de f es:

i) **cóncava hacia arriba** en (a,b) si f' es creciente en (a,b)

ii) **cóncava hacia abajo** en (a,b) si f' es decreciente en (a,b)

Definición: El **punto de inflexión** de una gráfica f es el punto donde la concavidad cambia de hacia arriba a hacia abajo (o viceversa).

FICHA 7: TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS Y/O DERIVABLES

Estos son algunos de los teoremas más importantes sobre funciones continuas.

Teorema de Weierstrass: Si f es continua en $[a, b]$ entonces presenta máximos y mínimos absolutos.

Teorema de Bolzano: Si f es continua en $[a, b]$ y además $f(a)f(b) < 0$ entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema del valor medio: Si f es continua en $[a, b]$ y además $f(a) < k < f(b)$ entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Teoremas sobre funciones derivables

Estos son algunos de los teoremas más importantes sobre funciones derivables.

Teorema de Rolle: Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$.

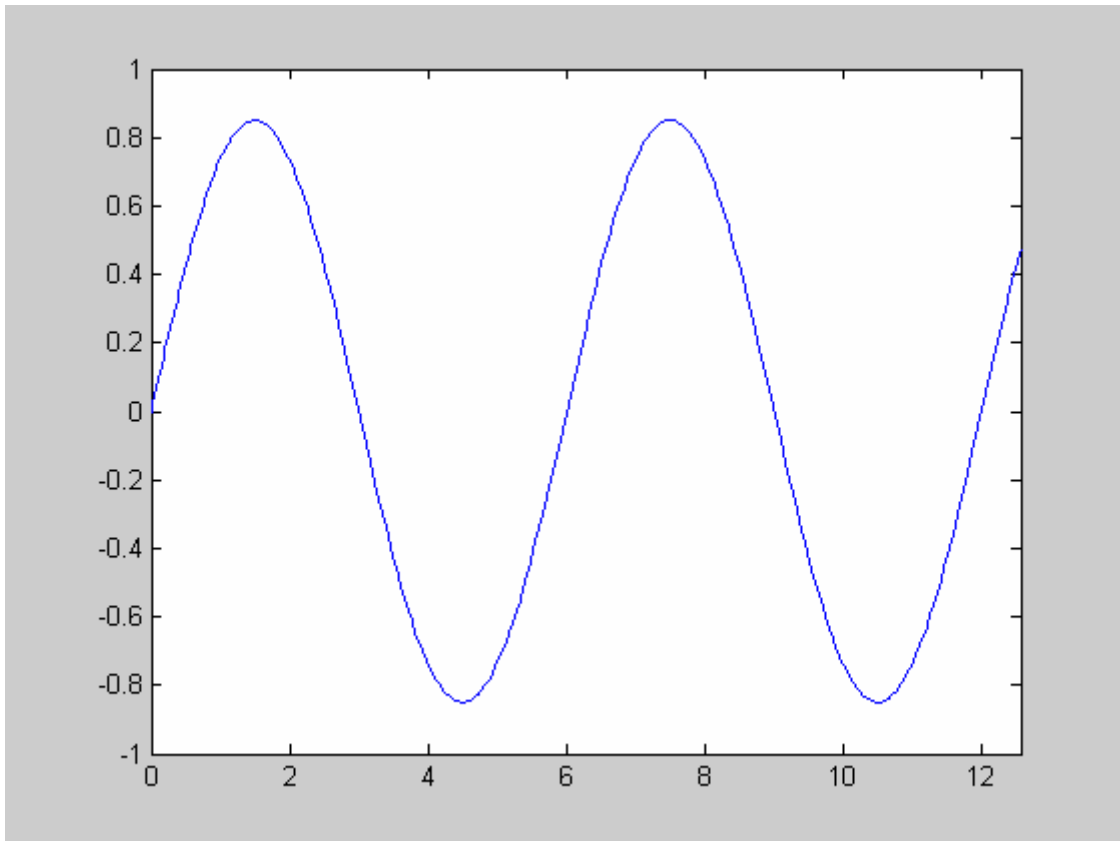
Teorema de Cauchy o teorema del valor medio generalizado: Si f y g son dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , entonces existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que $[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x)$.

Teorema del valor medio o teorema de Lagrange: Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x)$.

FICHA 8: ALGUNAS GRAFICAS

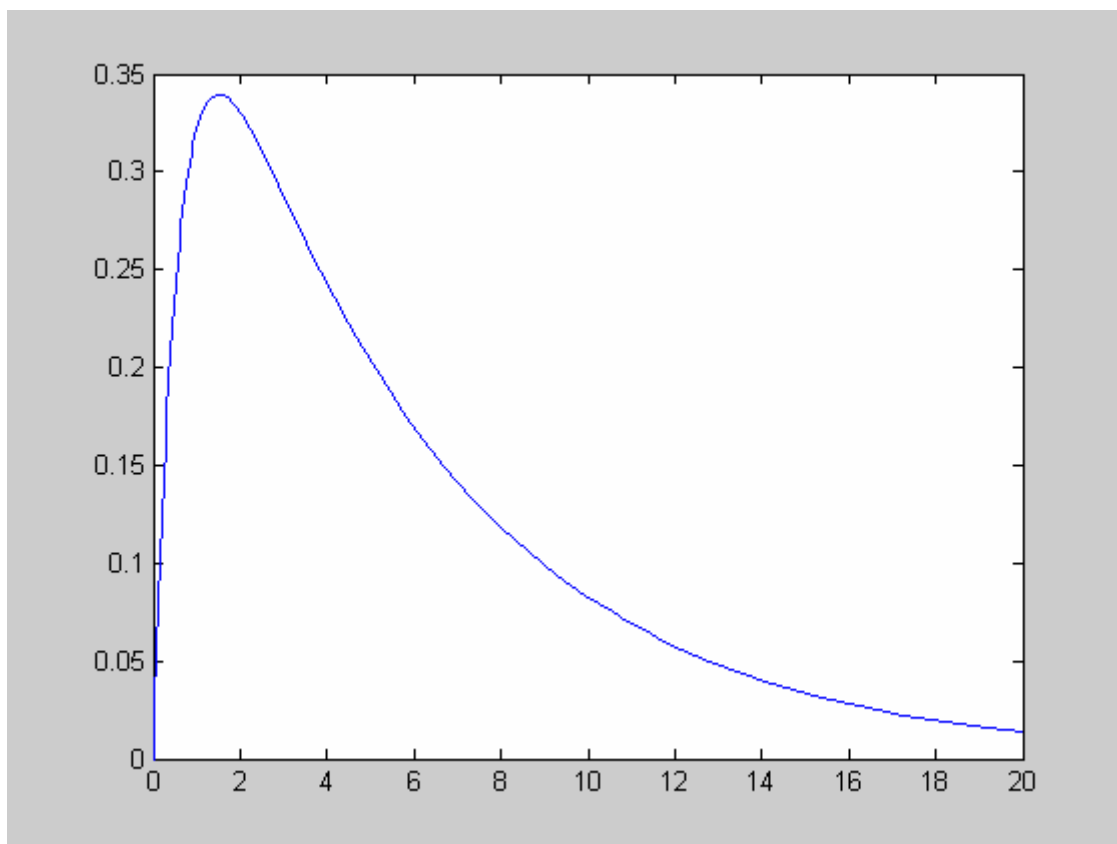
A continuación incluimos algunas gráficas interesantes de funciones.

Gráfica de la función $v = 0.85 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{3}$, con $t \geq 0$.

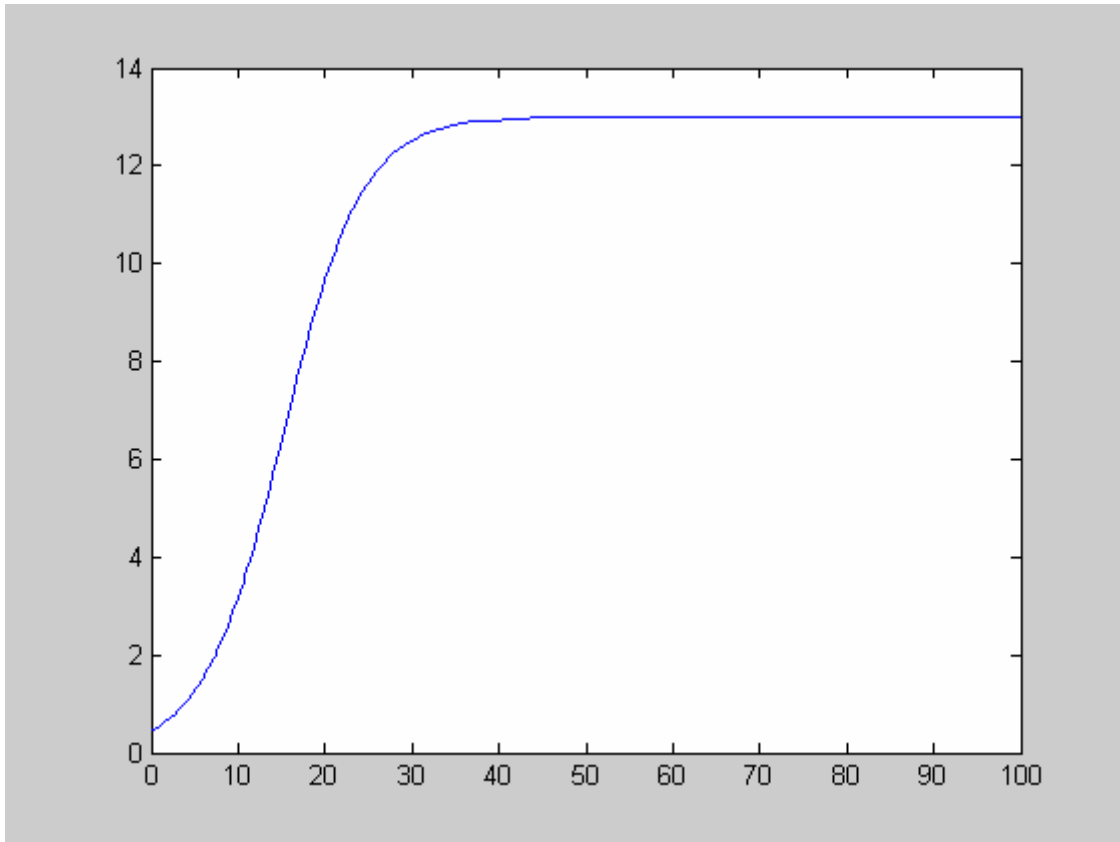


Fichas de Matemáticas

Gráfica de la función , $F(t) = 0.5(e^{0.18t} - e^{-1.65t})$, con $t \geq 0$.

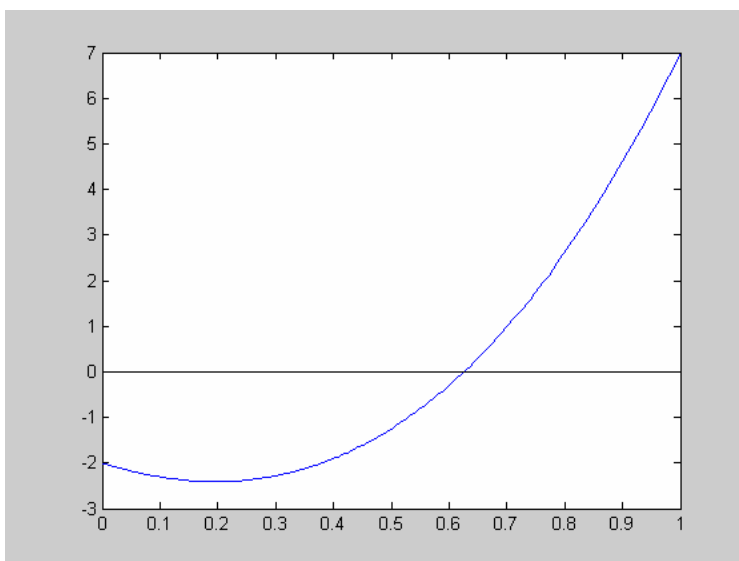


Gráfica de la función , $N(t) = 13(1 + e^{3.33-0.22t})^{-1}$, con $t \geq 0$.

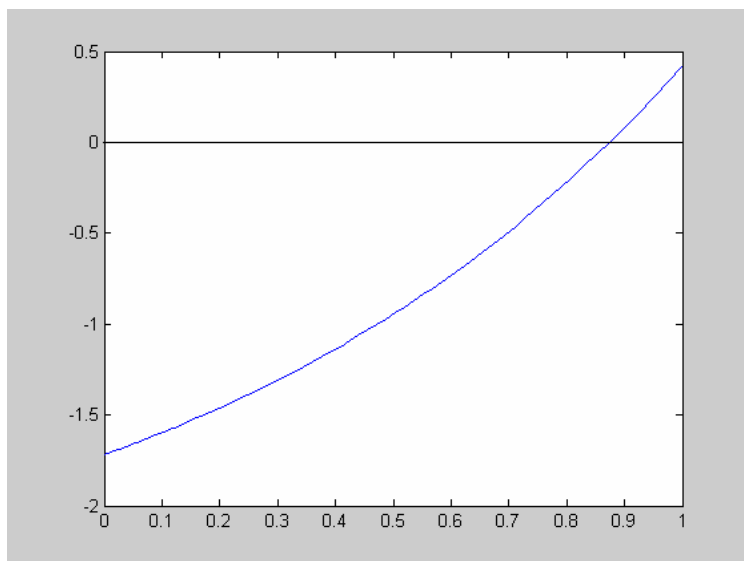


Gráficas de las siguientes funciones en el intervalo (0, 1):

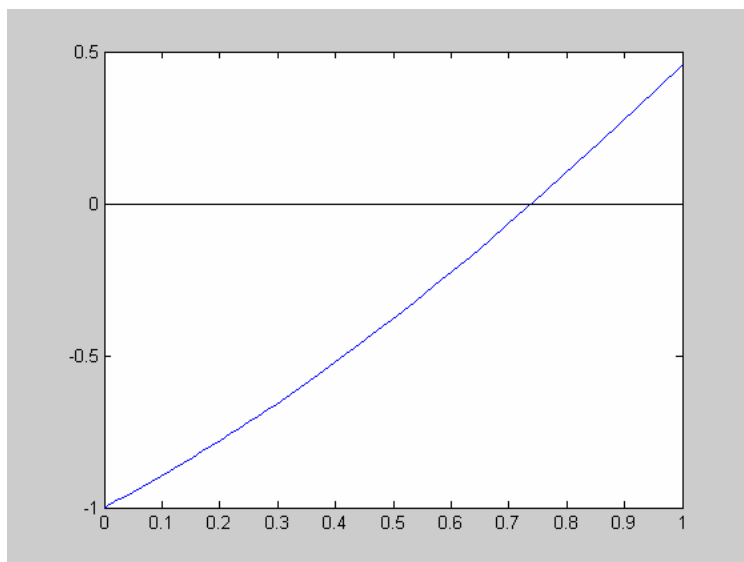
a) $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 4x - 2$



b) $f(x) = \pi^x - e$

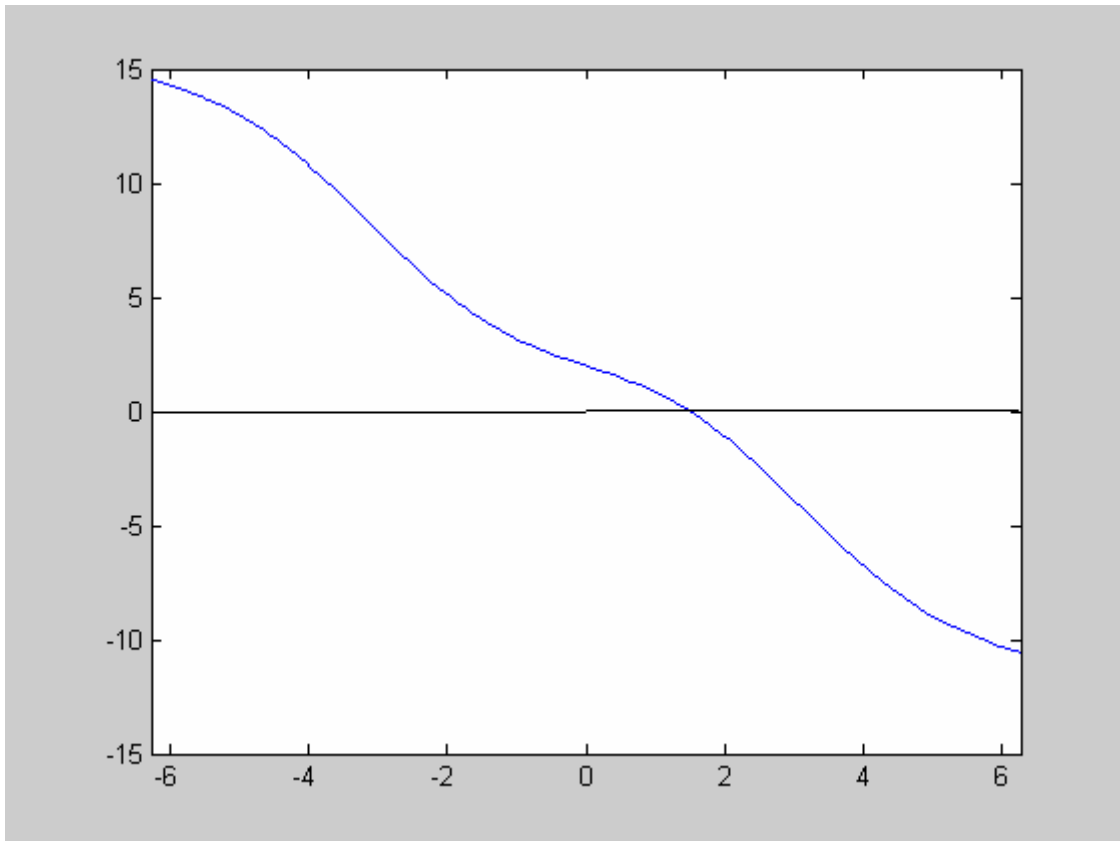


c) $f(x) = x - \cos x$



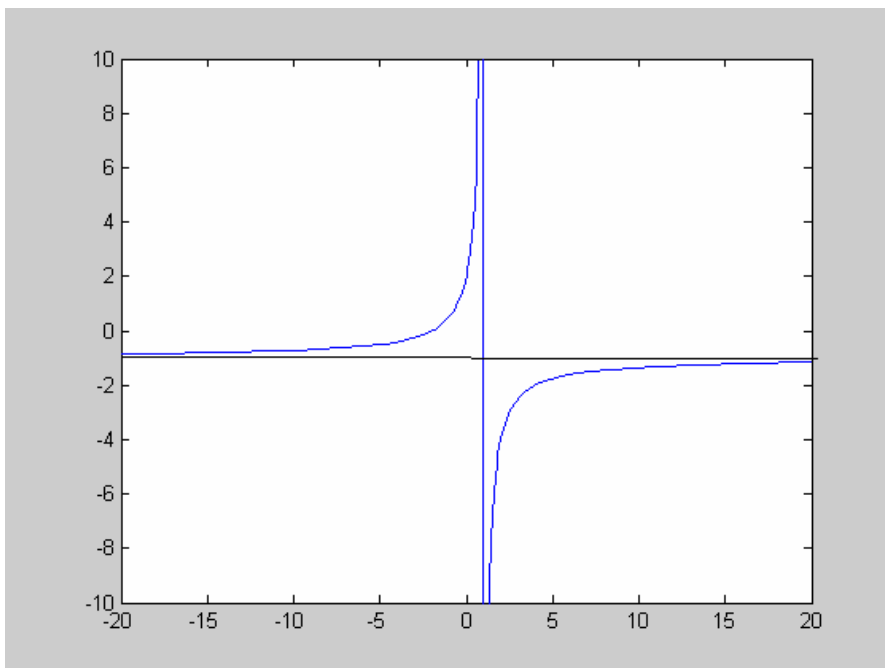
Fichas de Matemáticas

Gráfica de la función $f(x) = \sin(x) - 2x + 2$.

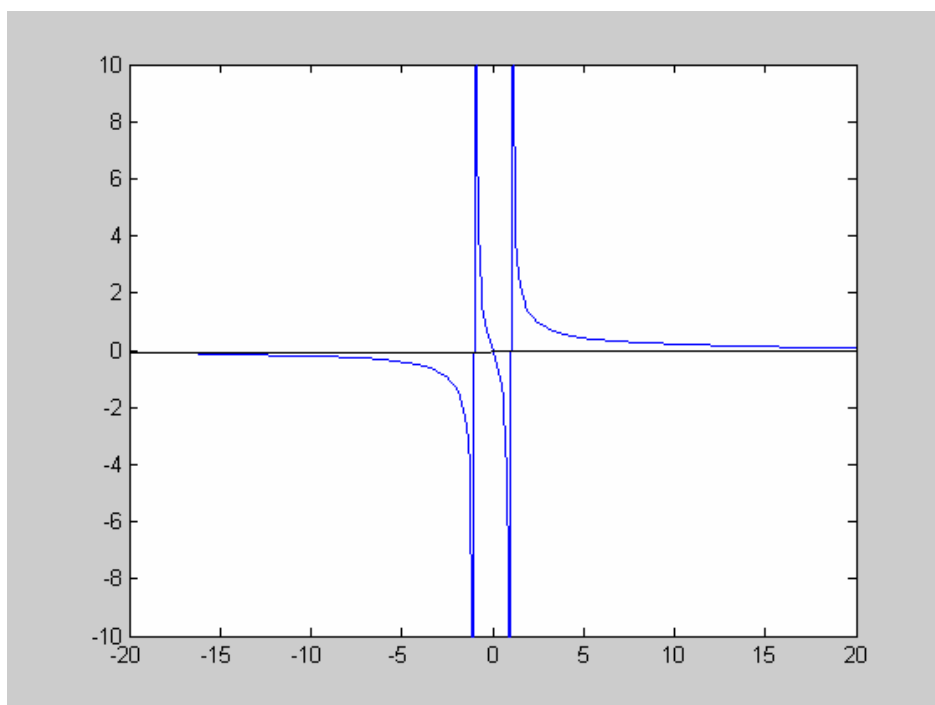


Gráficas de las siguientes funciones:

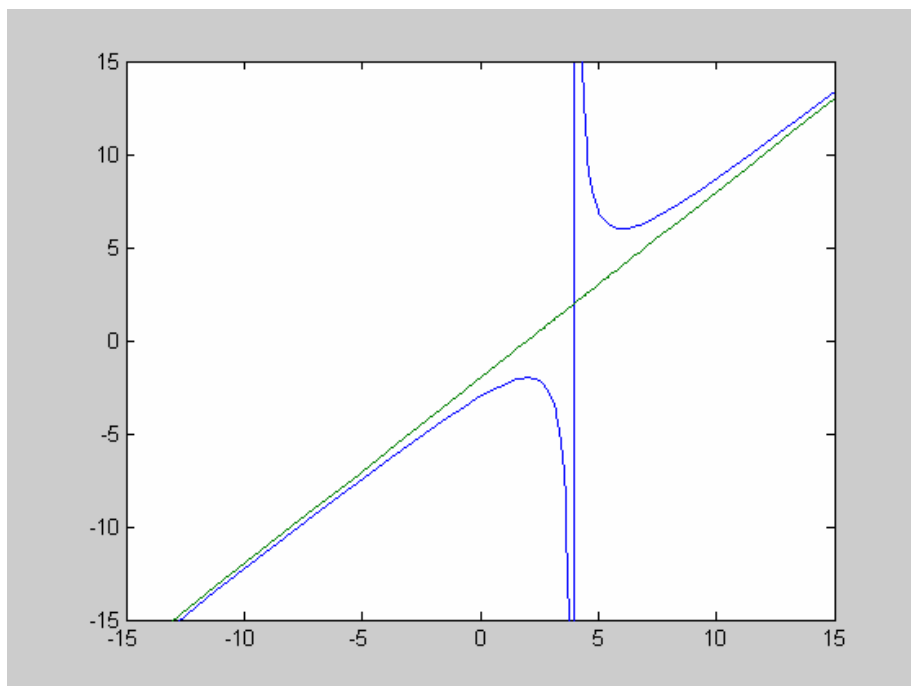
a) $f(x) = \frac{2+x}{1-x}$



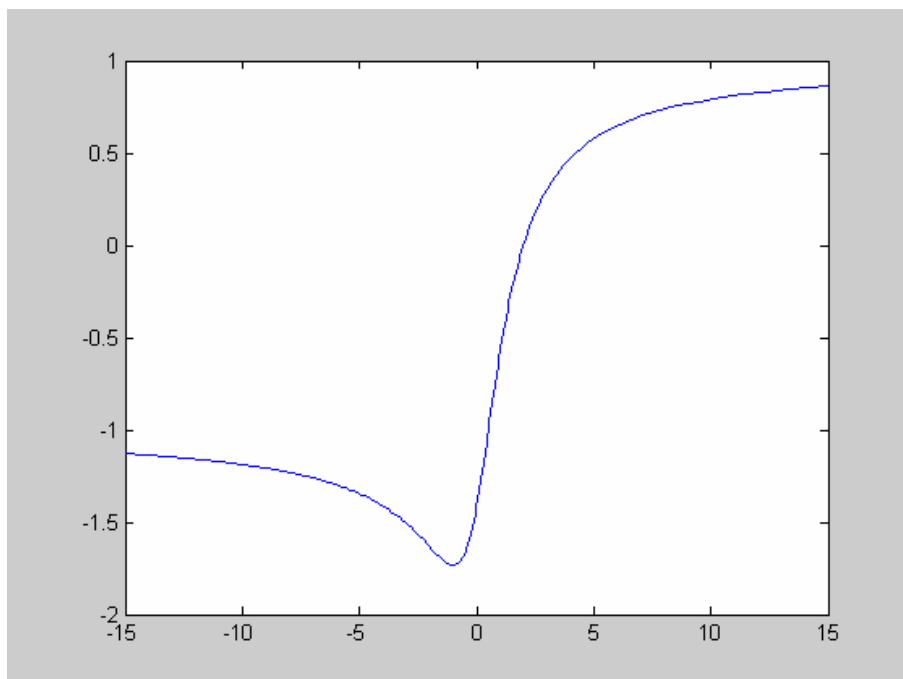
b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$



c) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 12}{x - 4}$



d) $f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 2}}$



FICHA 9: INTEGRACION

Primitiva de una función

Definición: Dada f de dominio (a, b) , decimos que P es primitiva de f en (a, b) , si y sólo si $P'(x) = f(x)$ en ese intervalo. Por lo tanto, el encontrar la función P es un proceso inverso o contrario a la derivación, y se lo conoce como integración o antiderivación.

Resumiendo:

P es primitiva de f en (a, b) si y solo si $P'(x) = f(x)$ para todo x de (a, b) .

Ejemplo: $f(x)=x^2$, una primitiva será $P(x)=x^3/3$. Obsérvese que existen infinitas funciones primitivas, pues $P(x)=x^3/3 + C$ siendo C una constante cualquiera también es una primitiva de f .

Si bien históricamente la **integración** empezó como dos métodos aparentemente sin relación uno con el otro, a saber:

- El cálculo de un área debajo de una curva.
- La operación inversa de la derivación

fue gracias a Isaac Barrow, Isaac Newton y Gottfried Leibniz, quienes dieron forma al teorema fundamental del cálculo, que se descubrió que ambas operaciones son equivalentes. Siendo así, llamase integración definida al cálculo de un área, e integración indefinida a la operación inversa de la derivación.

Integral indefinida

Si dada una función $y = F(x)$ su derivada es $y' = f(x)$, entonces por definición la integral de $y' = f(x)$ es $y = F(x)$, definiendo la integración como la inversa de la derivación. Veamos, para una función:

$$y = F(x)$$

Cuya derivada primera es:

Fichas de Matemáticas

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

tenemos que:

$$dy = f(x)dx$$

esto es:

$$y = \int f(x)dx$$

Concluimos:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Siendo esta una definición no muy formal de la Integración indefinida. En realidad, la integral indefinida de una función f es el conjunto de todas sus primitivas, es decir

$\int f(x)dx = F(x) + C$, siendo $F(x)$ una función tal que $F'(x)=f(x)$ y C una constante, que denominaremos constante de integración.

TABLA DE PRIMITIVAS INMEDIATAS

$$\int dx = x + C$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

con n entero o fraccionario

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sec^2(x) dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \int (1 + \tan^2(x)) dx = \tan(x) + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + C$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arctan(x) + C$$

OPERACIONES BASICAS

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx, \text{ con } a \text{ una constante}$$

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

FICHA 10: METODOS DE INTEGRACION

1) Cambio de Variable

2) Integración por partes

3) Integrales de funciones racionales

4) Integrales de funciones trigonométricas

5) Sustitución Trigonométrica

Cambio de Variable

Se basa en la regla de la cadena de derivación de funciones compuestas.

Fórmula: Si $u = g(x)$ $du = g'(x)dx$ entonces $\int f(u)du = F(u) + C$ siendo F una primitiva de f .

Ejemplo: $\int \frac{(3 \ln x - 5)^4}{x} dx$. Tómesese $u = g(x) = \ln(x)$ $du = g'(x)dx = \frac{1}{x} dx$

entonces $\int \frac{(3 \ln x - 5)^4}{x} dx = \int (3u - 5)^4 du$. A su vez esta integral se resuelve usando otro

cambio de variable $t = g(u) = 3u - 5$ $dt = g'(u)du = 3du$ o bien

$t = 3u - 5$ $dt / 3 = du$. Por lo tanto

$$\int \frac{(3 \ln x - 5)^4}{x} dx = \int (3u - 5)^4 du = \frac{1}{3} \int t^4 dt = \frac{1}{3} \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \frac{(3 \ln(x) - 5)^5}{5} + C.$$

Integración por partes

Se basa en la derivación de un producto de funciones.

Fórmula: Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ entonces como

$$(uv)' = uv' + u'v \quad y \quad u dx = du, v dx = dv \quad \text{se tiene } uv = \int u dv + \int v du$$
$$\int u dv = uv - \int v du; \quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx;$$

Ejemplo: $\int x \cos(x) dx$. Tomando $\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos(x) dx & v = \sin(x) \end{matrix}$ tendremos

$$\int x \cos(x) dx = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + C.$$

Integrales de funciones racionales

Son de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios en x .

CASO 1. El polinomio del numerador tiene grado menor que el denominador

1.1 Integrales de la forma $\int \frac{A}{ax^2 + bx + c} dx$ con A una constante, $a \neq 0$, y el polinomio del denominador sin raíces reales.

$$* ax^2 + bx + c = a(x + k)^2 + l$$

$$* \int \frac{A}{ax^2 + bx + c} dx = A \int \frac{1}{a(x + k)^2 + l} dx \quad \text{hacer el cambio } \sqrt{a}(x + k) = u; dx = \frac{1}{\sqrt{a}} du$$

$$* \int \frac{A}{ax^2 + bx + c} dx = A \int \frac{1}{u^2 + l} \frac{1}{\sqrt{a}} du = \frac{A}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{u^2 \pm (\sqrt{l})^2} du = \text{dependiendo del signo}$$

que tuviera l quedara:
si era **positivo**

$$= \frac{A}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{l}} \arctan \frac{u}{\sqrt{l}} + C = \frac{A}{\sqrt{a}\sqrt{l}} \arctan \frac{\sqrt{a}(x + k)}{\sqrt{l}} + C.$$

Si era **negativo**

$$= \frac{A}{\sqrt{a}} \frac{1}{2\sqrt{l}} \ln \left| \frac{\sqrt{l} + u}{\sqrt{l} - u} \right| + C = \frac{A}{2\sqrt{a}\sqrt{l}} \ln \left| \frac{\sqrt{l} + \sqrt{a}(x+k)}{\sqrt{l} - \sqrt{a}(x+k)} \right| + C$$

Ejemplo: $\int \frac{1}{2x^2 - 5x + 7} dx$

Solución. Completamos el trinomio cuadrado perfecto.

$$2x^2 - 5x + 7 = 2(x + k)^2 + l \text{ operando se obtiene } k = -5/4; l = 31/8$$

$$\int \frac{1}{2x^2 - 5x + 7} dx = \int \frac{1}{2(x - 5/4)^2 + 31/8} dx \text{ hacer el cambio}$$

$$\sqrt{2}(x - 5/4) = u; dx = \frac{1}{\sqrt{2}} du$$

$$\int \frac{1}{2x^2 - 5x + 7} dx = \int \frac{1}{u^2 + 31/8} \frac{1}{\sqrt{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{u^2 + (\sqrt{31/8})^2} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{31/8}} \arctan \frac{u}{\sqrt{31/8}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{31/8}} \arctan \frac{\sqrt{2}(x - 5/4)}{\sqrt{31/8}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{31}} \arctan \frac{4(x - 5/4)}{\sqrt{31}} + C$$

1.2 Integrales de la forma $\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$ con $m \neq 0, a \neq 0$, y el polinomio del denominador sin raíces reales.

Hacer salir la derivada $2ax + b$ del denominador.

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax + b) + (n - \frac{nb}{2a})}{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$= \frac{m}{2a} \ln(ax^2 + bx + c) + (n - \frac{nb}{2a}) \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \text{ siendo la nueva integral del tipo 1.1.}$$

Ejemplo: $\int \frac{x-1}{x^2 - x - 1} dx$

Solución.
$$\int \frac{x-1}{x^2-x-1} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{1}{2}}{x^2-x-1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-x-1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x-1} dx$$

siendo la nueva integral del tipo 1.1.

1.3 Integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

***Q(x) tiene todas sus raíces reales y distintas**

Cuando la factorización del polinomio $Q(x)$ es en factores lineales y distintos, es decir:

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n),$$

hacemos la siguiente descomposición:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \frac{A_3}{(x - a_3)} + \dots + \frac{A_n}{(x - a_n)}$$

donde $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son constantes reales. Nótese que una vez efectuada la descomposición, la integración es inmediata pues:

$$\int \frac{A_i}{(x - a_i)} dx = A_i \ln|x - a_i| + C$$

Ejemplo: $\int \frac{1}{x^2 - 16} dx$

$$Q(x) = x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - 4)} + \frac{A_2}{(x + 4)} \text{ de donde } A_1 = -1/8, A_2 = 1/8$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 16} dx = -\int \frac{1/8}{x - 4} dx + \int \frac{1/8}{x + 4} dx = -1/8 \ln|x - 4| + 1/8 \ln|x + 4| + C = 1/8 \ln \left| \frac{x + 4}{x - 4} \right| + C$$

*** Q(x) tiene todas sus raíces reales pero puede haber repetidas**

Cuando la factorización del polinomio $Q(x)$ es en factores lineales no necesariamente distintos, es decir: $Q(x) = (x - a_1)^{r_1} (x - a_2)^{r_2} (x - a_3)^{r_3} \dots (x - a_n)^{r_n}$

por cada factor lineal aparecerán tantas fracciones parciales como multiplicidad tenga este factor, por ejemplo para el factor $(x - a_k)^{r_k}$ habrá r_k fracciones parciales:

$$\frac{A_1}{(x - a_k)} + \frac{A_2}{(x - a_k)^2} + \frac{A_3}{(x - a_k)^3} + \dots + \frac{A_{r_k}}{(x - a_k)^{r_k}}$$

donde $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{r_k}$ son constantes reales.

De nuevo como en el caso anterior la integración de las fracciones parciales es sencilla y se reduce a calcular integrales de la forma: $\int \frac{A_i}{(x-a_i)^{r_i}} dx$ las cuales, para $n > 1$, se resuelven por un sencillo cambio de variable.

Ejemplo: $\int \frac{3x+8}{x^3-4x^2+4x} dx$

$$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2$$

$$\frac{3x+8}{x^3-4x^2+4x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-2)^2} \text{ de donde } A_1 = 2, A_2 = -2, A_3 = 7$$

$$\int \frac{3x+8}{x^3-4x^2+4x} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{-2}{(x-2)} dx + \int \frac{7}{(x-2)^2} dx = 2 \ln|x| - 2 \ln|x-2| - 7 \frac{1}{x-2} + C$$

*** $Q(x)$ tiene raíces complejas distintas**

Cuando en la factorización del polinomio $Q(x)$ aparecen factores cuadráticos de la forma ax^2+bx+c sin raíces reales, a cada uno de estos factores le corresponderá una fracción parcial de la forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ donde A y B son constantes reales.

Y la integral correspondiente se resolverá como se ha indicado anteriormente.

Ejemplo: $\int \frac{3x+1}{x^3+2x^2+5x} dx$

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 + 5x = x(x^2 + 2x + 5)$$

$$\frac{3x+1}{x^3+2x^2+5x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} \text{ de donde } A = \frac{1}{5}, B = \frac{-1}{5}, C = \frac{13}{5}$$

$$\int \frac{3x+1}{x^3+2x^2+5x} dx = \int \frac{1/5}{x} dx + \int \frac{-1/5x+13/5}{x^2+2x+5} dx = \dots =$$

$$\frac{1}{5} \ln|x| - \frac{1}{10} \ln|x^2+2x+5| + \frac{14}{5} \left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) \right) + C$$

*** $Q(x)$ tiene raíces complejas repetidas**

Fichas de Matemáticas

Cuando en la factorización del polinomio $Q(x)$ aparecen factores cuadráticos repetidos de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$ sin raíces reales, a cada uno de estos factores le corresponderán n fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

donde A_k y B_k son constantes reales para $k = 1, 2 \dots n$.

Ejemplo: $\int \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$

$$Q(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

$$\frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} \text{ de donde } A = 0, B = 1, C = 0, D = -1$$

$$\int \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \arctan(x) - \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Esta última integral se resuelve utilizando cambios trigonométricos que se explicarán más adelante.

CASO 2. El polinomio del numerador tiene grado mayor o igual que el denominador

Hacer la división de los polinomios y quedara una integral inmediata y una integral de los tipos estudiados anteriormente.

Ejemplo: $\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} dx$

Haciendo la división

$$3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1 = (x^2 + x + 1)(3x^2 - 8) + (9x + 7) \text{ de donde}$$

$$\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{(x^2 + x + 1)(3x^2 - 8) + (9x + 7)}{x^2 + x + 1} dx = \int (3x^2 - 8) dx + \int \frac{9x + 7}{x^2 + x + 1} dx$$

Integrales de funciones trigonométricas

CASO 1. Productos de seno y coseno $\int \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx$

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)}{2}$$

Utilizar: $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$$

CASO 2. Potencias de seno y coseno $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx$

- m impar positivo

cambio: $u = \operatorname{sen} x$ y recordar $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

- n impar positivo

cambio: $u = \cos x$ y recordar $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

- m y n par positivo

utilizar $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$; $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$

CASO 3. Potencias de secantes y tangentes $\int \tan^m x \sec^n x dx$

- n par positivo: cambio $u = \tan x$ y recordar $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
- m impar positivo: cambio $u = \sec x$ y recordar $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
- m par positivo y n impar positivo: reducir a potencias de la secante exclusivamente y recordar $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

CASO 4. Casos especiales

$$\int \tan^m x dx = \int \tan^{m-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$\int \sec^n x dx = \int \sec^{n-2} x (\tan^2 x + 1) dx$$

Sustitución Trigonométrica

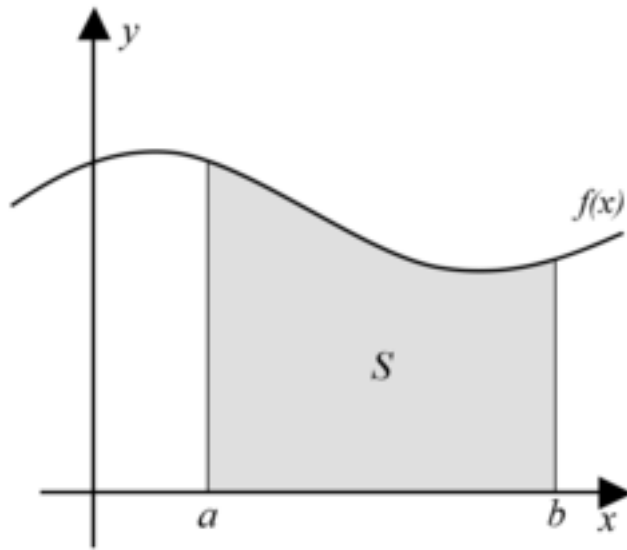
Cambios adecuados si aparecen los radicales:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{cambio } x = a \sin t$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{cambio } x = a \cos t$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} \quad \text{cambio } x = a \tan t$$

FICHA 11: INTEGRAL DEFINIDA



Dada una función: $y = f(x)$, la superficie S , comprendida entre la **función** y el **eje x**, y acotada por **a** y **b**, viene determinada por la integral definida:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Si sabemos de antemano o calculamos que:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

tenemos:

$$S = F(b) - F(a).$$

A esta relación entre la integral indefinida y la superficie bajo la función se le denomina Teorema fundamental del cálculo integral. También se le llama la Regla de Barrow, en honor a Isaac Barrow.

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Propiedades:

Si $f \geq 0$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Fichas de Matemáticas

Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x de (a,b) entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Teorema del valor medio

Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo x de (a,b) entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ y

$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. Además el valor $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ representa el valor medio de la función en el intervalo $[a,b]$

Teorema fundamental

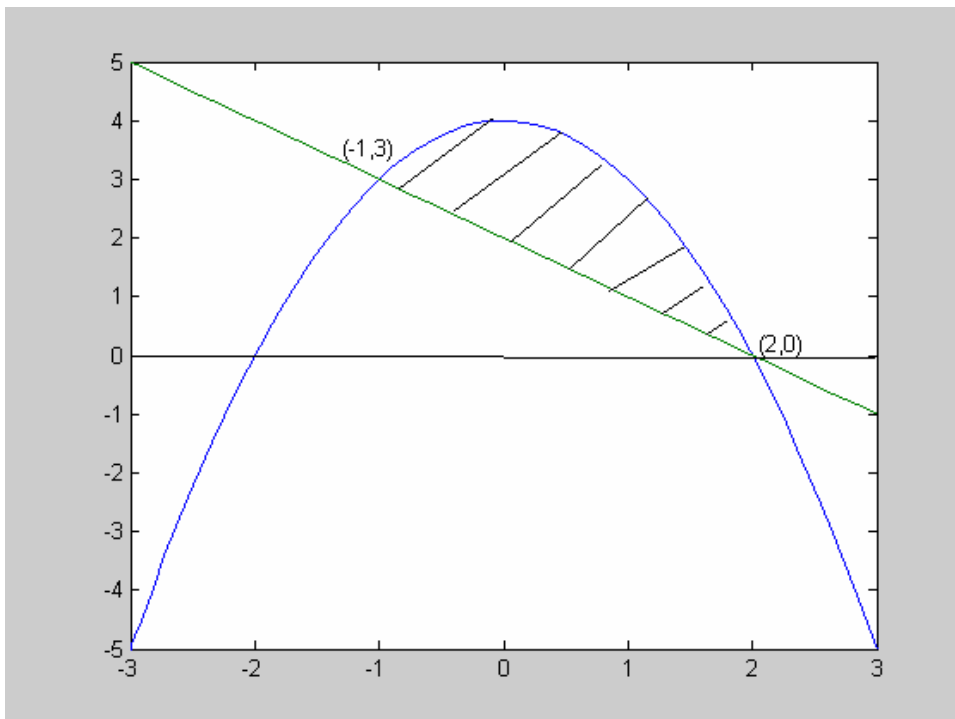
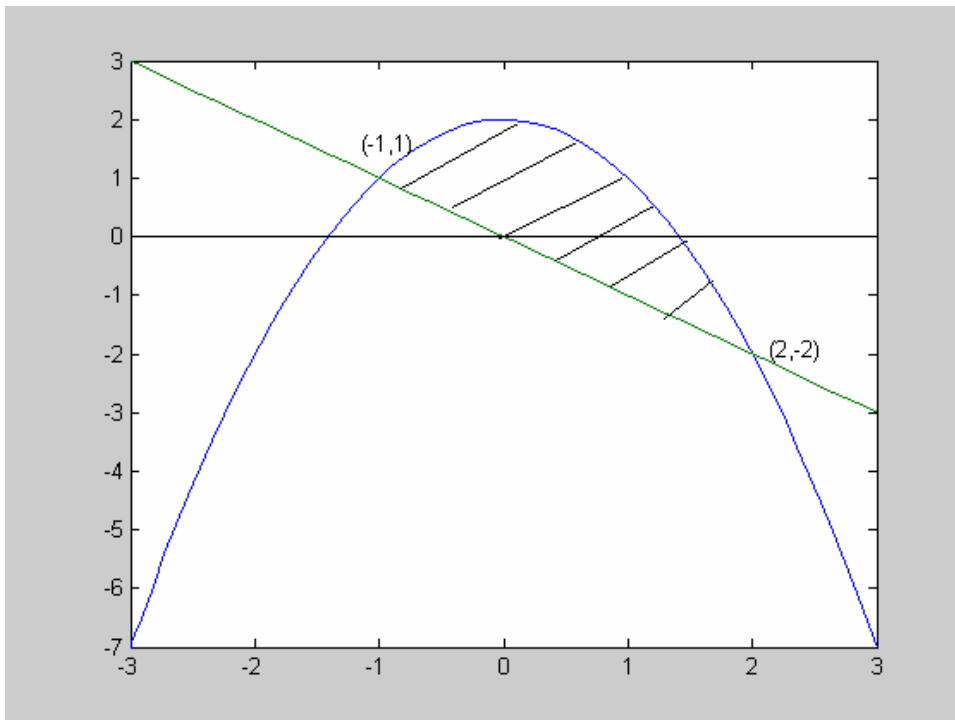
Dada una función f integrable sobre el intervalo $[a,b]$, definimos F sobre $[a,b]$ por

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ con $a \in [a,b]$ fijo. El teorema dice que si f es continua en $c \in [a,b]$,

entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

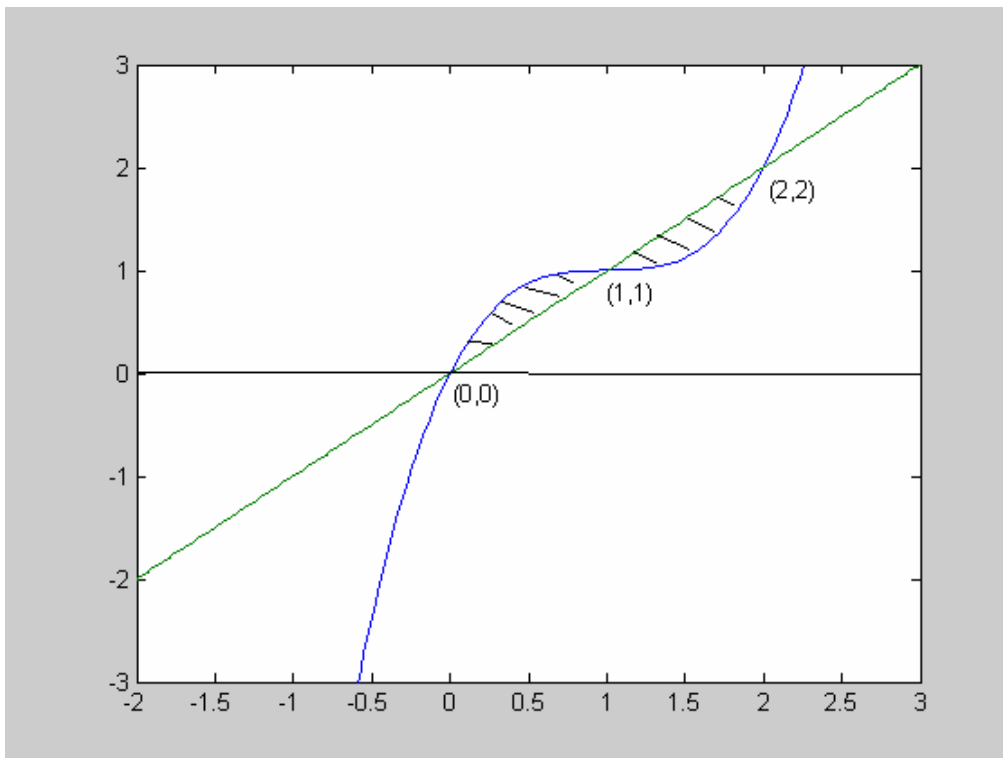
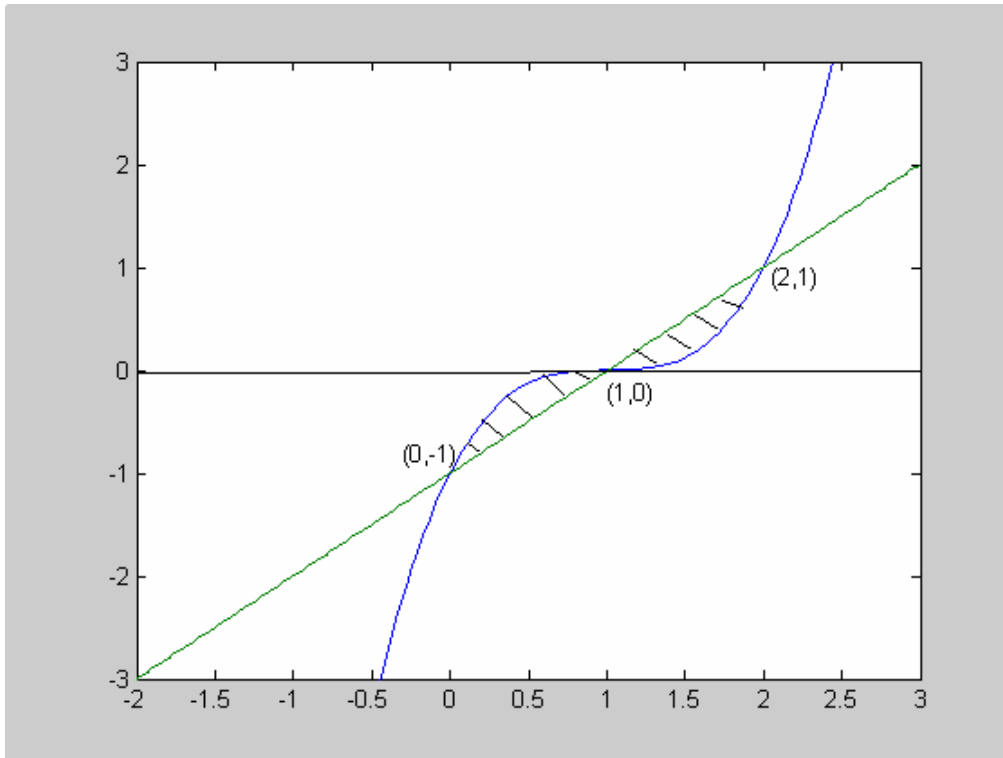
A continuación y a forma de ejemplos, incluimos el cálculo de algunas áreas.

1) Area limitada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = -x$



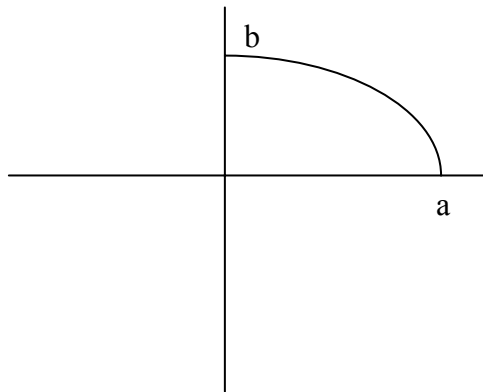
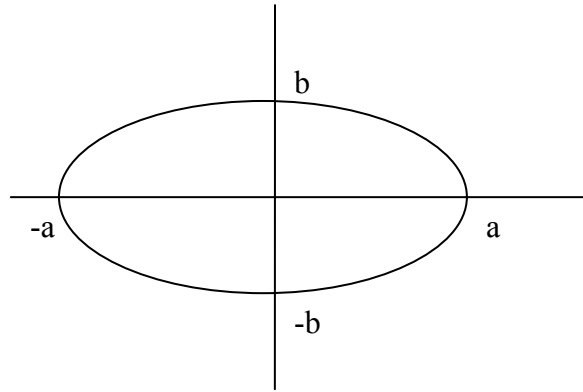
$$Area = \int_{-1}^2 ((2 - x^2) - (-x)) dx$$

2) Area limitada por la función $f(x) = (x-1)^3$ y la función $g(x) = x-1$



$$Area = \int_0^1 ((x-1)^3 - (x-1))dx + \int_1^2 ((x-1) - (x-1)^3)dx$$

3) Area de la Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

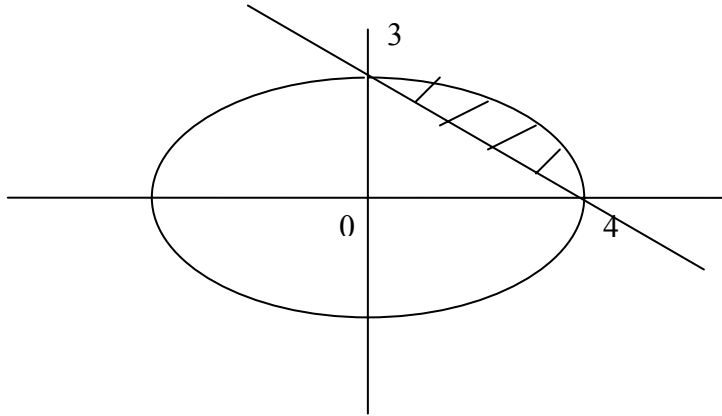


$$Area = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \text{ y utilizar el cambio } x = a \sin t \text{ y recordar}$$

$$\text{que } \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)).$$

Fichas de Matemáticas

- 4) Área región dada por la intersección entre el interior de la elipse $\frac{x^2}{16^2} + \frac{y^2}{9^2} = 1$ y el semiplano $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} \geq 1$.



$$Area = \int_0^4 \left[\sqrt{\frac{16 \times 9 - 9x^2}{16}} - \left(\frac{12 - 3x}{4} \right) \right] dx = \frac{3}{4} \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx - \int_0^4 \frac{12 - 3x}{4} dx$$

FICHA 12: INTEGRAL IMPROPIA

Las integrales impropias más básicas son integrales del tipo:

(1) Sea f continua en $[a, \infty)$. Se define la integral impropia $\int_a^\infty f(x)dx$ como

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$$

Cuando este límite exista y sea un número real decimos que la integral converge.

Análogamente si f continua en $(-\infty, a]$. Se define la integral impropia $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ como

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x)dx$$

Cuando este límite exista y sea un número real decimos que la integral converge.

Análogamente si f continua en $(-\infty, \infty]$. Se la integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ se calcula escribiéndola como

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

siendo a elegido de forma que las anteriores integrales sean integrales impropias del tipo descrito anteriormente y por tanto se resolverán mediante sendos límites. Cuando este límite exista y sea un número real decimos que la integral converge.

Fichas de Matemáticas

(2) Sea f continua en $[a, b)$ verificando que no está definida en b , o no es continua en b , o no está acotada en b . Se define la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$

cuando este límite exista y sea un número real decimos que la integral converge.

Análogamente, si f continua en $(a, b]$ verificando que no está definida en a , o no es

continua en a , o no está acotada en a . Se define la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$$

cuando este límite exista y sea un número real decimos que la integral converge.

También es posible definir integrales impropias si f presenta "problemas" en los dos límites de integración, por ejemplo si f no está definida en a , o no es continua en a , o no

está acotada en a , la integral impropia $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ se calcula como la suma de

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$$

siendo c un punto en el que las dos integrales impropias se reduzcan a una del tipo de las ya estudiadas y por tanto se calculen mediante sendos límites.

FICHA 13: ECUACIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones diferenciales aparecen en modelos matemáticos que tratan de describir situaciones de la vida real. Así, muchas leyes naturales pueden ser traducidas al lenguaje matemático mediante ecuaciones que envuelven derivadas, como en física, donde la velocidad y la aceleración aparecen como derivadas; en biología, la derivada se utiliza como una razón de crecimiento de poblaciones; en química, como rapidez de reacciones, entre otros más.

En diversos modelos matemáticos, para obtener una ecuación diferencial que describa un problema real, se asume que la situación se rige por leyes simples. Una vez que se construye el modelo en forma de ecuación diferencial, lo que viene es solucionarla y con estas soluciones, se hacen predicciones relativas al comportamiento del problema en cuestión.

Una ecuación diferencial es una relación entre una función y una o varias de sus derivadas sucesivas. La incógnita en estas ecuaciones es la función que se está derivando. Desgraciadamente no existe un método único para solucionarlas.

1. ECUACIONES CON VARIABLES SEPARABLES

Son las que pueden escribirse en la forma:

$$f(x) \, dx = g(y) \, dy$$

Es decir, con las variables separadas.

Solución general: $\int g(y) \, dy = \int f(x) \, dx$

2. ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Nota previa

Una función $f(x,y)$ se llama función homogénea de grado α respecto a las variables x e y , si para todo λ admisible, se verifica: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$.

Fichas de Matemáticas

Por ejemplo, la $f(x, y) = x^2 + x y + y^2$ cumple: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$. Luego es homogénea de grado 2.

Análogamente, la función $f(x, y) = \frac{y}{x}$ cumple: $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Por tanto es homogénea de grado 0.

Una ecuación diferencial se llama homogénea, si puede escribirse de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

siendo M y N funciones homogéneas del mismo grado.

El cambio de función $y = vx$ transforma la ecuación en una separable en las variables x, v.

3. ECUACIONES LINEALES

Una ecuación diferencial se dice lineal si puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones reales y continuas en un intervalo $[a, b]$ y n es una constante real diferente de 0 y 1.

Para resolver la ecuación diferencial lineal utilizaremos el ***método de variación de las constantes de Leibniz***. Sea la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Primero se trata de obtener una solución de la ecuación homogénea, esto es, con término independiente nulo:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

Esta ecuación es de variables separables $\frac{dy}{dx} = P(x)y$; $\frac{dy}{y} = P(x)dx$

Y por tanto, integrando se llega a la solución $y = Ce^{-\int P(x)dx}$, solución de la ecuación diferencial lineal homogénea.

Fichas de Matemáticas

Para encontrar la solución de la ecuación diferencial lineal, utilizaremos el ***Método de variación de constantes***.

Supongamos que C es función de x, tenemos $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

Vayamos ahora a la ecuación original no homogénea y sustituyamos

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

simplificando

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \text{ es decir } C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

Por tanto

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + K$$

Finalmente, la solución general de la ecuación lineal es

$$y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + K \right] e^{-\int P(x)dx}$$

4. ECUACIONES DE BERNOULLI

Una ecuación diferencial se dice de Bernoulli si puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones reales y continuas en un intervalo $[a, b]$ y n es una constante real diferente de 0 y 1.

Observación: cuando $n=0$ la ecuación de Bernoulli se reduce a una ecuación lineal y cuando $n=1$ se trata de una ecuación variables separables, casos ya estudiados.

Para buscar la solución se hace el cambio $u = y^{1-n}$, con lo que se reduce a una lineal.

FICHA 14: LA FUNCION LOGISTICA

La función exponencial es un modelo válido para crecimientos o decrecimientos continuos en los que las condiciones son siempre igualmente favorables: aumento del capital ingresado en un banco, desintegración de sustancias radioactivas... Las poblaciones de seres vivos comienzan creciendo según una curva exponencial pero si no hay catástrofes, llegan a invadir su espacio vital y, debido a la limitación de alimentos, etc., su crecimiento se amortigua, no sobrepasando su población límite. Este tipo de aumento, amortiguado por un nivel de saturación se llama crecimiento logístico. La función logística describe mucho mejor que la exponencial lo que realmente ocurre con las poblaciones de seres vivos.

Ejemplo: el desarrollo embrionario

En el desarrollo de un embrión, el huevo fecundado comienza a dividirse y el número de células empieza a crecer: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc. Éste es un crecimiento exponencial. Pero el feto sólo puede crecer hasta un tamaño que el útero pueda soportar; así, otros factores comienzan a disminuir el incremento del número de células, y la tasa de crecimiento disminuye. Después de un tiempo, el niño nace y continúa creciendo. Finalmente, el número de células se estabiliza y la estatura del individuo se hace constante. Se ha alcanzado la madurez, en la que el crecimiento se detiene.

En general, la función logística asociada a una exponencial es:

FUNCIÓN EXPONENCIAL $y = N_0 e^{rt}$ donde N_0 es la población inicial, t el tiempo y r la tasa de crecimiento

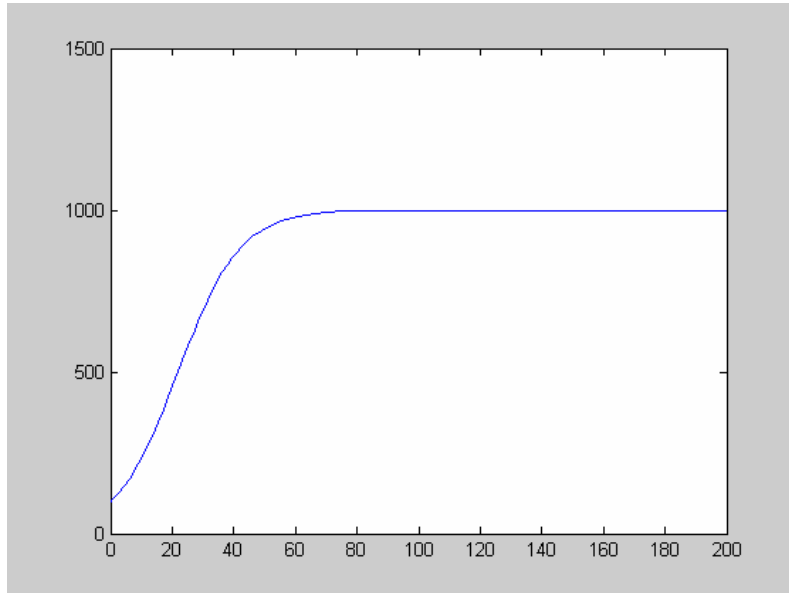
FUNCION LOGÍSTICA $y = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) e^{-rt}}$ donde K es la población límite.

UN CASO REAL:

En una isla dejamos escapar 100 conejos, especie desconocida hasta entonces en esos parajes. Supongamos que las condiciones para que se reproduzcan son óptimas, por lo que se incrementan en un 10% mensual (hasta aquí sería un modelo exponencial típico).

Fichas de Matemáticas

Supongamos ahora que la isla tuviera un tamaño y unas condiciones tales que, a lo sumo pudieran vivir 1000 conejos. Este número sería nuestra población límite. En este caso la función que describe el crecimiento es la función logística asociada. Observa en la siguiente grafica sus características. $K = 1000$ y $\frac{K}{N_0} - 1 = 9$.



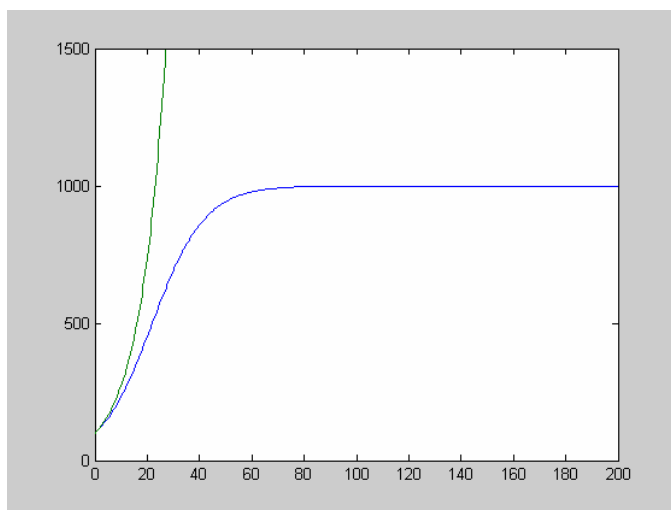
En la siguiente tabla se observa el número de conejos que habría en la isla según cada modelo.

MES	LOGÍSTICA	EXPONENCIAL	DIFERENCIA
0	10	10	0
1	10,89108911	11	0,108910891
2	11,85112635	12,1	0,248873653
3	12,88355435	13,31	0,426445649
4	13,99164763	14,641	0,649352367
5	15,17844100	16,1051	0,926659001
6	16,44665058	17,71561	1,268959417
7	17,79858848	19,487171	1,688582524
8	19,23607239	21,4358881	2,199815713
9	20,76033237	23,57947691	2,819144541
10	22,37191717	25,9374246	3,565507431
11	24,07060334	28,53116706	4,460563718
12	25,85531075	31,38428377	5,528973019
13	27,72402845	34,52271214	6,798683692

Fichas de Matemáticas

14	29,67375526	37,97498336	8,301228096
15	31,70045912	41,77248169	10,07202257
16	33,79905934	45,94972986	12,15067053
17	35,96343500	50,54470285	14,58126785
18	38,18646215	55,59917313	17,41271099
19	40,46008101	61,15909045	20,69900944
20	42,77539323	67,27499949	24,49960626
21	45,12278758	74,00249944	28,87971187
22	47,49209081	81,40274939	33,91065858
23	49,87273923	89,54302433	39,6702851
24	52,25396479	98,49732676	46,24336197

Fíjate cómo durante los primeros meses los números son casi idénticos: aún estaba lejos el nivel de saturación. Sin embargo, al aumentar el tiempo la diferencia es enorme y después los resultados obtenidos para cada modelo no tienen nada que ver.



FICHA 15: LA ECUACION DE VERHULST

Historia

La ecuación Verhulst fue publicada por primera vez por Pierre François Verhulst en 1838 después de haber leído el "Ensayo sobre el principio de población" de Thomas Malthus. Verhulst derivó su ecuación logística para describir el crecimiento auto-limitado de una población biológica. En ocasiones, la ecuación es también llamada "ecuación Verhulst-Pearl" por su redescubrimiento en 1920. Alfred J. Lotka obtuvo de nuevo la ecuación en 1925, llamándola "ley del crecimiento poblacional".

Esta típica aplicación de la ecuación logística es un modelo común del crecimiento poblacional según el cual:

- la tasa de reproducción es proporcional a la población existente.
- la tasa de reproducción es proporcional a la cantidad de recursos disponibles.

El segundo término modela, por tanto, la competición por los recursos disponibles, que tiende a limitar el crecimiento poblacional.

Si P representa el tamaño de la población y t representa el tiempo, este modelo queda formalizado por la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right),$$

donde la constante r define la tasa de crecimiento y K es la capacidad de persistencia. La solución general a esta ecuación es una función logística.

Con una población inicial P_0 :

$$P(t) = \frac{KP_0 e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)}$$

donde $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K$

FICHA 16: SUCESION MATEMATICA

Una **sucesión matemática** es una función definida sobre los enteros naturales. Es costumbre emplear las letras $u, v, w, \dots$ para designarlas, en vez de $f, g, h, \dots$ que sirven para las funciones. Del mismo modo, la variable se nota usualmente n (por *natural*) en vez de x , habitual para las variables reales.

Por convención, se escribe u_n en vez de $u(n)$ la imagen de n por la sucesión

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow u_n \end{aligned}$$

Existen esencialmente dos maneras de definir una sucesión: explícitamente o implícitamente. También asociado a una sucesión está el concepto de convergencia.

Definición explícita

La definición es **explícita** cuando se da una fórmula que permite hallar u_n mediante un cálculo único donde no interviene otras variable que n . En otras palabras, u_n es una función de n : $u_n = f(n)$.

Definición implícita

La definición es **implícita** cuando u_n no sólo depende de n sino también de otros términos de la sucesión, que se tendrán que calcular antes.

Por ejemplo se puede fijar $u_0 = 1$ y decidir que para cualquier natural $n > 0$, $u_n = n \cdot u_{n-1}$. Para hallar u_3 digamos, hay que calcular u_2 lo que necesita el conocimiento de u_1 el cual se calcula con u_0 .

Obtenemos: $u_1 = 1 \times u_0 = 1$, luego $u_2 = 2 \times u_1 = 2$ y por fin $u_3 = 3 \times u_2 = 6$. Esta sucesión define el factorial de un número.

Otro ejemplo muy conocido es la sucesión de Fibonacci definida por $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Dada una sucesión, la fórmula que define un término con relación a los anteriores se llama *relación de inducción*.

Fichas de Matemáticas

Una sucesión, u_n , está acotada superiormente/inferiormente si el conjunto, S , de todos sus elementos está acotada superiormente/inferiormente

Si la sucesión u_n es convergente llamaremos al número s el *límite* de la sucesión

Escribimos, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Las sucesiones aritméticas

Una **sucesión aritmética** puede ser definida como función de n :

$$u_n = u_0 + rn \text{ con } r \text{ real}$$

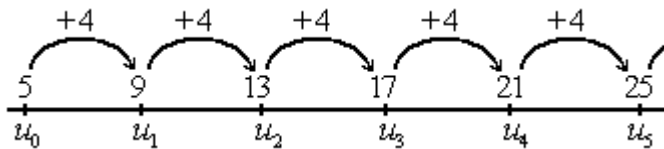
También puede ser definida por inducción de la siguiente forma:

$$u_0 = a$$

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ con } r \text{ real}$$

Al número real r se le denomina **razón** de la sucesión. Si la razón es positiva, la sucesión **crece**, y tiende hacia $+\infty$. Si es negativa, **decrece** y tiende hacia $-\infty$. Si es nula, la sucesión es **constante**.

Ejemplo:



Existe una fórmula muy sencilla para sumar números en progresión aritmética (es decir términos sucesivos de una sucesión aritmética).

$$S = \frac{\text{numero de terminos} \times (\text{primer término} + \text{ultimo término})}{2}$$

Como caso particular muy frecuente: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(1+n)}{2}$.

A veces lo más difícil es encontrar el número de términos para poder aplicar la fórmula. Si el primer término a sumar vale a , el último vale b , y la razón es r , entonces el número

de términos en la suma es: $\frac{|b-a|}{r} + 1$

Fichas de Matemáticas

Por ejemplo, para la suma: $S = 1492 + 1499 + 1506 + \dots + 2003$ de términos consecutivos de una sucesión de razón 7, encontramos $\frac{|2003 - 1492|}{7} + 1 = 74$ términos, y la suma es $\frac{74(2003 + 1492)}{2} = 129315$.

Dada una sucesión aritmética $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ un término cualquiera en una sucesión aritmética, viene dado por: $a_n = a_k + (n - k)r$

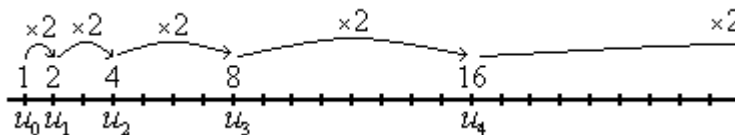
Las sucesiones geométricas

Una **sucesión geométrica** puede ser definida como función de n : $u_n = br^n$ con r real

También puede ser definida por inducción de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}u_0 &= b \\u_{n+1} &= u_n r \quad \text{con } r \text{ real}\end{aligned}$$

Al número real r se le denomina también **razón** de la sucesión. Ejemplo:



El comportamiento de la sucesión geométrica depende del signo del primer término y del valor de su razón distinguiéndose cuatro casos. Si la razón es positiva, entonces la sucesión es **monótona**, y tiene un aspecto muy regular.

Si la razón es negativa entonces la sucesión es **oscilante**. Se distinguen dos casos en función de si r es menor que -1 ó no. El signo del primer término no modifica el *aspecto general* de la sucesión (cambiar de signo equivale a una simetría alrededor del eje horizontal, y aquí no se nota mucho).

Si el término inicial es nulo, o si la razón vale -1, 0 ó 1, la sucesión no entra en la clasificación anterior, pero no importa pues en tal caso carece de interés.

Descartando estos casos particulares, se puede decir que la convergencia de la sucesión depende del valor absoluto de la razón:

si $|r| > 1$, no converge, y si $|r| < 1$, converge hacia cero.

Fichas de Matemáticas

Notemos r la razón, y supongamos $r \neq 1$. Entonces la suma de números en progresión geométrica es dada por la fórmula siguiente, bajo tres formas equivalentes:

$$S = \frac{\text{primer término} - \text{último término multiplicado por la razón}}{1 - \text{razón}}$$

Si $-1 < r < 1$, la suma de todos los términos de la sucesión es: $S = \frac{u_0}{1 - r}$.

Dada una sucesión geométrica $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ un término cualquiera en una sucesión viene dado por: $a_n = a_k r^{n-k}$. Para calcular el producto de los n primeros términos de una sucesión: $P_n = \sqrt{(a_n a_1)^n}$.

FICHA 17: LA SUCESION DE FIBONACCI

La sucesión de Fibonacci en la naturaleza

En la naturaleza, hay muchos elementos relacionados con la sucesión de Fibonacci, que viene definida por $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

- 1) Según el propio Leonardo de Pisa Fibonacci, en su *Libro de los ábacos*, la secuencia puede ayudar a calcular casi perfectamente el número de pares de conejos n meses después de que una primera pareja comienza a reproducirse (suponiendo que los conejos se empiezan a reproducir cuando tienen dos meses de edad).
- 2) La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.
- 3) La relación entre la distancia entre las espiras del interior espiralado de cualquier caracol (no sólo del nautilus)
- 4) La relación entre los lados de un pentágulo (estrella de David).
- 5) La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en la botánica recibe el nombre de Ley de Ludwig).
- 6) La distancia entre las espirales de una piña.
- 7) Las relaciones entre muchas partes corporales de los humanos y los animales:
 - La relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo.
 - La relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos.
 - La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla.
 - La relación entre las divisiones vertebrales.
 - La relación entre las articulaciones de las manos y los pies.

La secuencia de Fibonacci en el arte

- 1) Relaciones arquitectónicas en las Pirámides de Egipto.
- 2) La relación entre las partes, el techo y las columnas del Partenón, en Atenas (s. V a. C.).
- 3) En los violines, la ubicación de las efes (los “oídos”, u orificios en la tapa) se relaciona con el número áureo.

Fichas de Matemáticas

- 4) El número áureo aparece en las relaciones entre altura y ancho de los objetos y personas que aparecen en las obras de Miguel Ángel, Durero y Da Vinci, entre otros.
- 5) Las relaciones entre articulaciones en el hombre de Vitrubio y en otras obras de Leonardo da Vinci.
- 6) En las estructuras formales de las sonatas de Mozart, en la *Quinta Sinfonía* de Beethoven, en obras de Schubert y Debussý (estos compositores probablemente compusieron estas relaciones de manera inconsciente).
- 7) Autores como Bártok, Messiaen, Stockhausen compusieron obras cuyas unidades formales se relacionan (a propósito) con el número áureo.
- 8) En la pág. 61 de la novela de Dan Brown *El código Da Vinci* aparece una versión desordenada de los primeros ocho números de Fibonacci (13, 3, 2, 21, 1, 1, 8, 5), que funcionan como una pista dejada por el curador del museo del Louvre, Jacques Saunière. En las pp. 121 a 123 explica algunas de las apariciones de este número en la naturaleza.

En el episodio “Sabotaje” de la serie de televisión *NUMB3RS* (primera temporada, 2005), el genio de la matemática Charlie Eppes menciona que el número *aureo* se encuentra en la estructura de los cristales, en la espiral de las galaxias y en la concha del nautilus.

FICHA 18: SERIES

Una serie es una suma infinita de términos de una sucesión a_n que se representa por

$\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ o bien $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=p}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ con $p \in \mathbb{N}$. Se denomina término de la serie a los

valores a_n y suma parcial n-ésima de la serie a S_n . Por tanto, una serie es el límite de la sucesión de las sumas parciales y S se denomina suma de la serie. Según el valor de este límite, las series se denominan convergentes o divergentes.

Algunos tipos de series

Una **serie geométrica** es una serie en la cual cada término se obtiene multiplicando el

anterior por una constante. Ejemplo: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

En general una serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge si y solo si $|z| < 1$ y en tal caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

La **serie armónica** es la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

La serie armónica es divergente.

Una **serie alternada** es una serie donde los términos alternan el signo. Ejemplo:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Criterios de convergencia

Clasificar una serie es determinar si converge a un número real o si diverge ($\pm \infty$ u oscilante). Para esto existen distintos criterios que, aplicados a la serie en cuestión, mostrarán de que tipo es (convergente o divergente).

Condición necesaria

Si una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

El recíproco no es cierto. Por ello, si $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente

Criterios de convergencia (todos los límites que aparecen en este apartado son cuando n tiene a ∞)		
Criterio de comparación	Sean (a_n) y (b_n) dos series.	Si $\lim [a_n / b_n] = \text{finito}$, entonces ambas series tienen el mismo carácter
Criterio de la raíz:	$\lim (a_n)^{1/n}$	< 1 : converge > 1 : diverge $= 1$: duda
Criterio del cociente:	$\lim a_{n+1} / a_n$	< 1 : converge > 1 : diverge $= 1$: duda (se resuelve por Raabe)
Criterio de Raabe:	$\lim \{ n [1 - (a_{n+1} / a_n)] \}$	> 1 : converge < 1 : diverge $= 1$: duda
Criterio para series alternadas $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$	Si $(a_n)_n$ sucesión monótona decreciente y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$	converge

Serie telescópica

Es aquella cuyos términos admiten una descomposición en fracciones simples y entonces la suma parcial n-ésima puede calcularse utilizando únicamente el primer y último término de la serie.

Ejemplo: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

Como $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1/2}{n - 1} - \frac{1/2}{n + 1}$ tendremos

Fichas de Matemáticas

$$S_2 = \frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{4}$$

$$S_4 = \frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{4} + \frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{5} = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{4} - \frac{1/2}{5}$$

$$S_5 = \frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{4} + \frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{5} + \frac{1/2}{4} - \frac{1/2}{6} = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{5} - \frac{1/2}{6}$$

$\vdots$

$$S_n = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+1}$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+1} \right) = 3/4.$$

Por lo tanto la serie es convergente y su suma vale $\frac{3}{4}$.

FICHA 19: ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Ecuaciones en diferencias

	Definición	Ejemplos
Que es una ecuación en diferencias?	Ecuación asociada a una sucesión (X_n) en la que intervienen dos o más términos de la sucesión	1) $X_{n+1} = X_n + k$ 2) $X_{n+2} - X_{n+1} = X_n + k$ 3) $X_n + k = X_{n-1}^2$
Orden	Es la diferencia entre el mayor subíndice de la ecuación y el menor	1) orden = $n+1-n = 1$ 2) orden = $n+2-n = 2$ 3) orden = $n-(n-1) = 1$
Tipo	Según la máxima potencia de los términos de la sucesión	1) lineal 2) lineal 3) cuadrática

Tipos de ecuaciones	Forma general	Solución
Lineal homogénea de primer orden	$X_{n+1} = aX_n$	$X_n = a^n X_0$
Lineal de primer orden	$X_{n+1} = aX_n + b$	$X_n = X_0 a^n + b \left[\frac{1-a^n}{1-a} \right] \quad \text{si } a \neq 1$ $X_n = X_0 + nb \quad \text{si } a = 1$

FICHA 20: POLINOMIO DE TAYLOR

Llamaremos Polinomio de Taylor de grado n desarrollado alrededor de a en un punto x al dado por:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

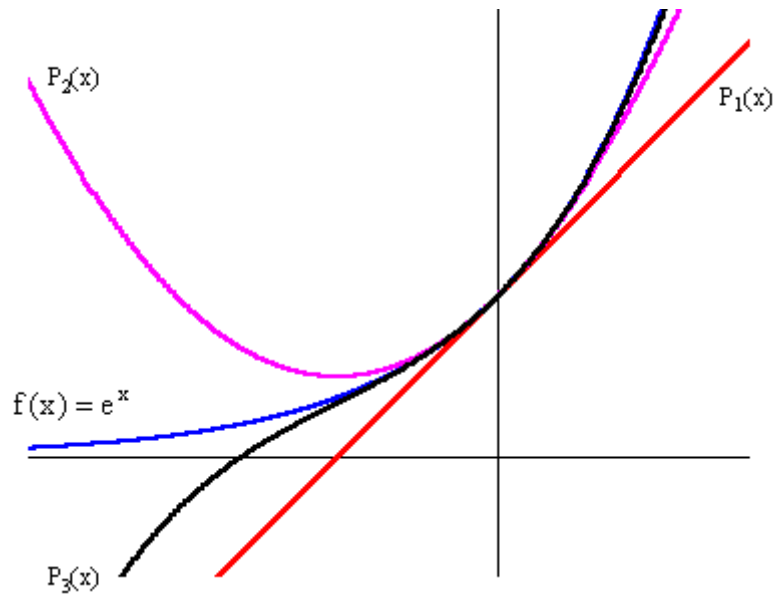
En la siguiente tabla compararemos a la función exponencial $f(x) = e^x$ (última columna) con los polinomios de Taylor desarrollado alrededor de $a=0$ correspondientes de grados 1 hasta 4. Obsérvese que la segunda columna corresponde a la recta tangente.

x	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$	e^x
1	2	2.5	2.666666	2.7083333	2.718281828
0.5	1.5	1.625	1.645833	1.6484375	1.6487212707
0.3	1.3	1.345	1.3495	1.3498375	1.34985880757
0.1	1.1	1.105	1.10516667	1.10517083	1.10517091807
0.01	1.01	1.01005	1.01005017	1.01005017	1.010050167
0.001	1.001	1.0010005	1.00100050000	1.00100050017	1.00100050016

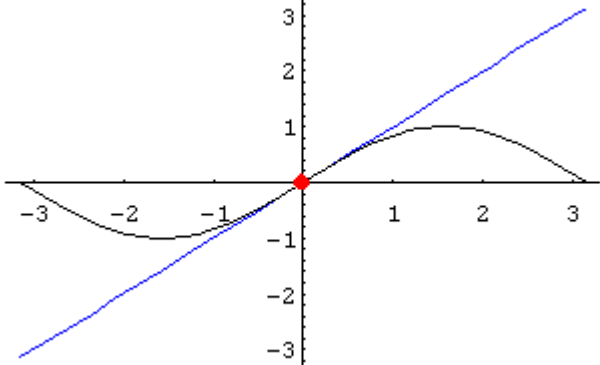
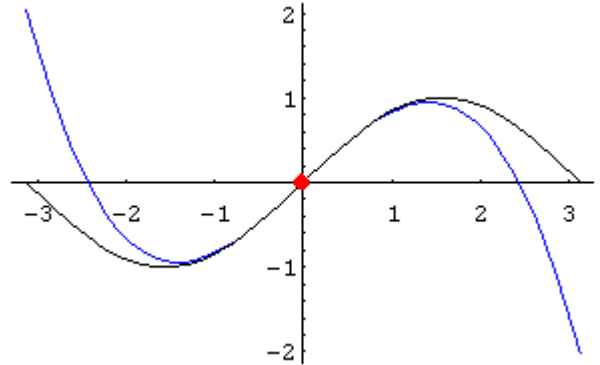
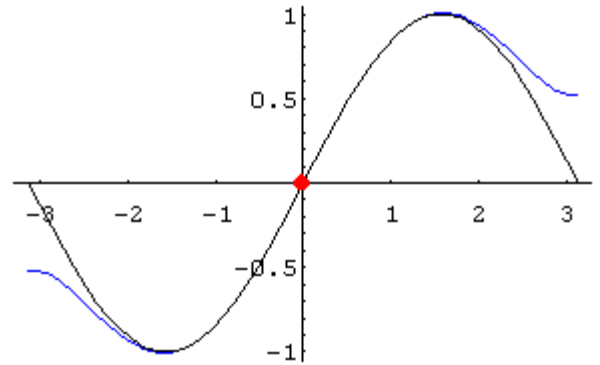
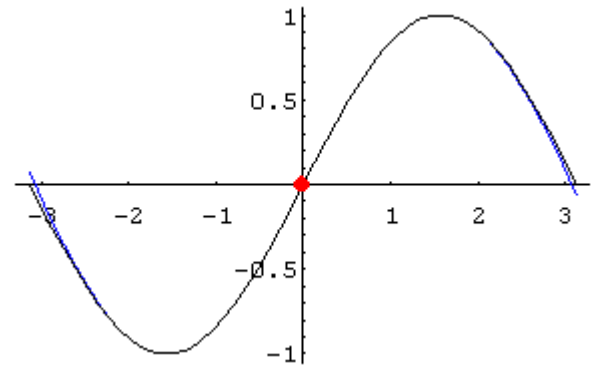
Si analizamos con detenimiento la información proporcionada por esta tabla, veremos lo siguiente:

1. En cada columna, vemos que la aproximación del correspondiente polinomio de Taylor es mejor cuanto más cercano se encuentre x a 0.
2. En cada renglón, vemos que para cada valor fijo de x , no importa si está cerca o no de 0, la aproximación va mejorando conforme aumentamos el grado del polinomio de Taylor.

Una representación gráfica de esta situación se muestra a continuación para los polinomios de Taylor de grado 1, 2 y 3.



En los siguientes ejemplos observarás como una función se puede aproximar mediante ciertos polinomios, y verás como la aproximación es mejor conforme el polinomio contiene más y más términos.

$f(x) = \text{sen}(x)$ con aproximaciones alrededor de $a = 0$ (polinomios hasta de grado 7)	
$a = 0$	$f(x) = \text{sen}(x)$
	Polinomio de Taylor
Polinomio de Taylor = x	
Polinomio de Taylor = $x + \frac{x^3}{6}$	
Polinomio de Taylor = $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$	
Polinomio de Taylor = $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040}$	

$f(x) = \sin(x)$ con aproximaciones alrededor de $a = 1$ (polinomios hasta de grado 8)



$a = 1$

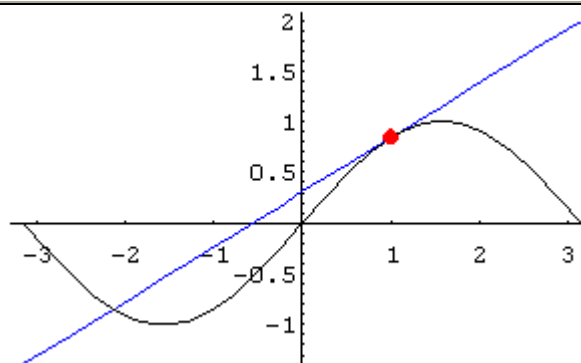


$f(x) = \sin(x)$

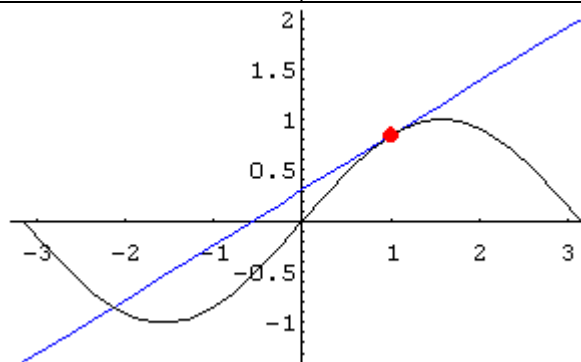


Polinomio

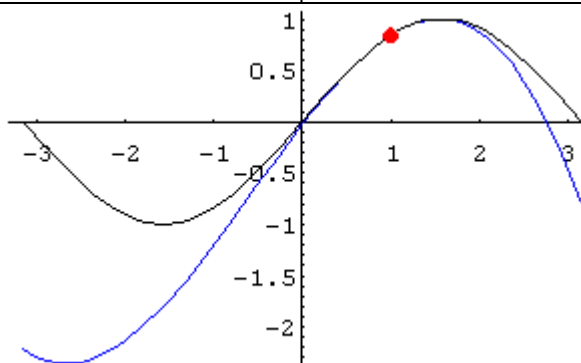
Polinomio de Taylor =
 $\sin(1) + (x - 1)\cos(1)$



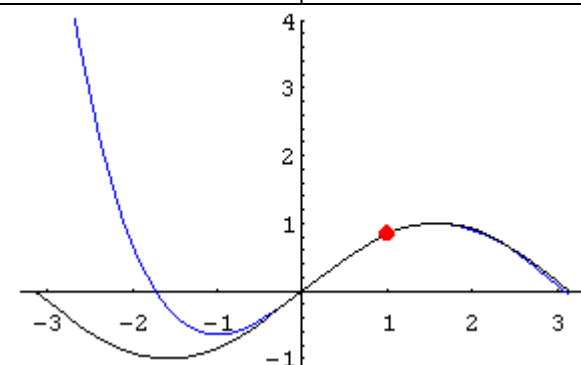
Polinomio de Taylor =
 $\sin(1) + (x - 1)\cos(1) - \frac{(x - 1)^2}{2}\sin(1)$



Polinomio de Taylor =
 $\sin(1) + (x - 1)\cos(1) - \frac{(x - 1)^2}{2}\sin(1)$
 $- \frac{(x - 1)^3}{6}\cos(1)$

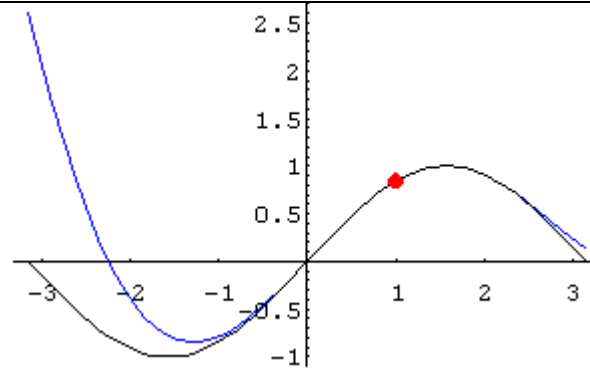


Polinomio de Taylor =
 $\sin(1) + (x - 1)\cos(1) - \frac{(x - 1)^2}{2}\sin(1)$
 $- \frac{(x - 1)^3}{6}\cos(1) + \frac{(x - 1)^4}{24}\sin(1)$



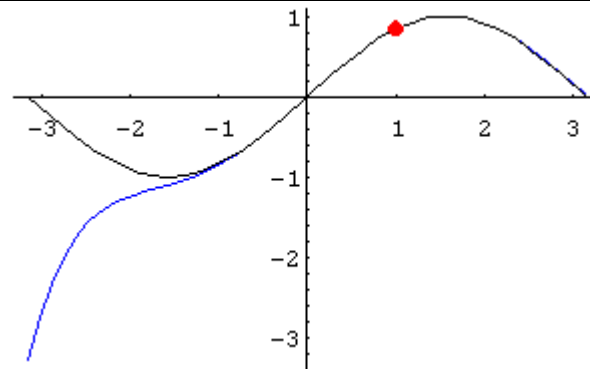
Polinomio de Taylor =

$$\begin{aligned} &\sin(1) + (x-1)\cos(1) - \frac{(x-1)^2}{2}\sin(1) \\ &- \frac{(x-1)^3}{6}\cos(1) + \frac{(x-1)^4}{24}\sin(1) \\ &+ \frac{(x-1)^5}{120}\cos(1) \end{aligned}$$



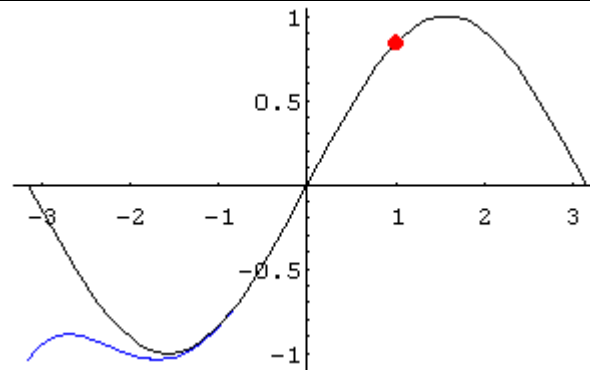
Polinomio de Taylor =

$$\begin{aligned} &\sin(1) + (x-1)\cos(1) - \frac{(x-1)^2}{2}\sin(1) \\ &- \frac{(x-1)^3}{6}\cos(1) + \frac{(x-1)^4}{24}\sin(1) \\ &+ \frac{(x-1)^5}{120}\cos(1) - \frac{(x-1)^6}{120}\sin(1) \end{aligned}$$



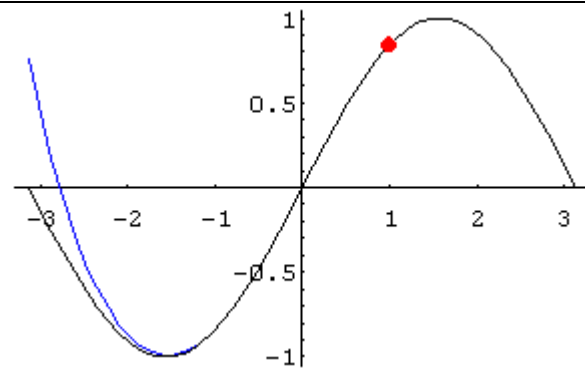
Polinomio de Taylor =

$$\begin{aligned} &\sin(1) + (x-1)\cos(1) - \frac{(x-1)^2}{2}\sin(1) \\ &- \frac{(x-1)^3}{6}\cos(1) + \frac{(x-1)^4}{24}\sin(1) \\ &+ \frac{(x-1)^5}{120}\cos(1) - \frac{(x-1)^6}{120}\sin(1) \\ &- \frac{(x-1)^7}{5040}\cos(1) \end{aligned}$$



Polinomio de Taylor =

$$\begin{aligned} & \sin(1) + (x-1)\cos(1) - \frac{(x-1)^2}{2}\sin(1) \\ & - \frac{(x-1)^3}{6}\cos(1) + \frac{(x-1)^4}{24}\sin(1) \\ & + \frac{(x-1)^5}{120}\cos(1) - \frac{(x-1)^6}{720}\sin(1) \\ & - \frac{(x-1)^7}{5040}\cos(1) + \frac{(x-1)^8}{40320}\sin(1) \end{aligned}$$



FICHA 21: SERIE DE TAYLOR

Mediante los polinomios de Taylor, como hemos observado obtenemos aproximaciones de funciones. La serie de Taylor nos dará el valor exacto de la función en un punto.

Serie de Taylor

La serie de Taylor se obtiene haciendo que el grado del polinomio de Taylor sea infinito, lo que transforma la aproximación en una igualdad, debido a que el error tiende a cero si $n \rightarrow \infty$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k .$$

Serie de MacLaurin

Es un caso particular de la serie de Taylor con $a=0$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Serie de Maclaurin para algunas funciones elementales

Fichas de Matemáticas

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$$

Debemos concretar pues cual es el error que se comete al aproximar una función por el polinomio de Taylor en vez de utilizar la serie de Taylor.

TEOREMA DE TAYLOR. Sea f continua en $[a, b]$ y con derivadas hasta de orden n continuas también en este intervalo cerrado; supóngase que $f^{n+1}(x)$ existe en (a, b) , entonces para x y $x_0 \in (a, b)$ la aproximación de la función usando el polinomio de Taylor de grado n es:

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

cometiendo un error de aproximación

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \text{ donde } c \text{ es un punto que se encuentra entre } x \text{ y } x_0.$$

Observación: El Teorema del valor medio es un caso particular del Teorema de Taylor.

Algunas aplicaciones

1) La serie de Taylor permite estimar con la precisión deseada el valor de cualquier función mediante un polinomio. Esto es muy útil para las Unidades de Aritmética-Lógica de calculadoras y computadores.

Fichas de Matemáticas

Ejemplo: cuántos términos se necesitan para calcular $\sin(35^\circ) = \sin(\frac{35}{180}\pi)$ para tener una exactitud de al menos 10 decimales?

2) No todas las funciones admiten una primitiva. Por ejemplo, $e^{-\frac{x^2}{2}}$ no tiene ninguna primitiva. Sin embargo puede calcularse $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ aproximando la integral por polinomios utilizando el desarrollo de Maclaurin.

CALCULO DE APROXIMACIONES Y ESTIMACION DEL ERROR

A continuación veremos algunos ejemplos para aproximar una función utilizando la fórmula de Taylor con residuo.

Ejemplo. Encuentre un valor aproximado para $\sin(35^\circ)$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 3 y estime el error.

Solución. Al igual que cuando utilizamos la recta tangente para efectuar aproximaciones, queremos aproximar a la función $\sin(x)$ en el valor de 35° , para lo cual debemos conocer a f y sus derivadas en un punto x_0 cercano a éste, el cual expresado

en radianes es $x_0 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, es decir habrá que calcular:

a) Función: $f(x) = \sin(x)$

b) Punto: $x_0 = \frac{\pi}{6}$

c) Derivadas:

$$f(x) = \sin(x) \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$$

$$f'(x) = \cos(x) \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.8660254$$

$$f''(x) = -\sin(x) \quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0.5$$

$$f^3(x) = -\cos(x) \quad f^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0.8660254$$

A partir de la derivada cuarta se repiten los términos. La aproximación del valor de la función en un punto x dada por el polinomio de Taylor de grado 3 es:

$$f(x) \cong f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$$

Que sustituyendo, nos da,

$$\text{sen}(x) \cong 0.5 + 0.8660254\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 0.25\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - 0.14433756\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$$

Esta expresión nos servirá para estimar valores de $\text{sen}(x)$ para x cercanos a $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

En particular para $x = 35^\circ = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{180}$.

$$\text{sen}(35^\circ) \cong 0.5 + 0.8660254\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 0.25\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - 0.14433756\left(\frac{5\pi}{6}\right)^3$$

$$\text{sen}(35^\circ) \cong 0.57357512$$

En la expresión para el error al aproximar con un polinomio de grado 3

$$E_3 = \frac{f^4(c)}{4!} \left(\frac{5\pi}{180}\right)^4 = 0.00000241 \text{sen}(c).$$

El error siempre lo obtendremos en términos de un valor c entre x y x_0 , sin embargo nótese que $|\text{sen}(c)| \leq 1$, entonces podremos tener una cota para el error, es decir,

$$|E_3| = |0.00000241 \text{sen}(c)| = 0.00000241 |\text{sen}(c)| \leq 0.00000241,$$

y en consecuencia la aproximación se obtuvo con un error que no excede de 0.00000241.